3 CALCOLO INTEGRALE

In questo capitolo tratteremo l'argomento che va sotto il nome di *integrale* di una funzione (reale di variabile reale). L'integrale è uno strumento per calcolare l'area di figure geometriche piane non elementari, cioè diverse da poligoni e cerchi. Tutte le regole che ci permettono di lavorare con gli integrali vanno sotto il nome di *calcolo integrale*.

3.1 INTEGRALE INDEFINITO

Definizione 3.1. Sia f una funzione reale di variabile reale continua in un intervallo (a, b). Una funzione F definita in (a, b) e tale che per ogni $x \in (a, b)$ è derivabile con derivata pari a $f(x)$

$$F'(x) = f(x)$$

è detta *funzione primitiva*, o più concisamente, *primitiva* della funzione f nell'intervallo (a, b). Come vedremo con l'osservazione 3.16 a pagina 314 nell'ipotesi di funzione continua in un intervallo la primitiva esiste e il teorema fondamentale del calcolo integrale (teorema 3.4 a pagina 313) ci dice anche come costruirla.

Osservazione 3.1. Nell'ipotesi che f è continua nell'intervallo (a, b) allora sicuramente esiste almeno una primitiva di f, se però manca la continuità oppure è continua ma non in un intervallo allora non è più garantita l'esistenza di una primitiva di f.

Osservazione 3.2. Se F è una primitiva di f anche tutte le funzioni che si ottengono da F aggiungendo una costante sono primitive di f, infatti

$$D[F(x) + c] = F'(x) = f(x) \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

Dunque *se f ammette una primitiva ne ammette infinite.*

Proposizione 3.1. *Data una funzione f continua in un intervallo $(a.b)$, se F_1 e F_2 sono funzioni primitive di f allora differiscono per una costante.*

$$\boxed{F_1, F_2 \text{ primitive di } f \implies \exists c \in \mathbb{R}\colon F_1 - F_2 = c}$$

Dimostrazione. Per definizione di primitiva

$$F_1'(x) = f(x), \quad F_2'(x) = f(x)$$

di conseguenza per ogni $x \in (a, b)$ la derivata della loro differenza è nulla

$$D[F_1(x) - F_2(x)] = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

La funzione differenza $F_1 - F_2$ è continua e derivabile in (a, b) e la sua derivata è identicamente nulla per cui per il teorema 2.12 a pagina 177 è una funzione costante in (a, b). □

Osservazione 3.3. Geometricamente la proposizione 3.1 ci dice che noto il diagramma di una primitiva, il diagramma di ogni altra primitiva della stessa funzione si ottiene per traslazione lungo l'asse y.

Definizione 3.2. In base alla proposizione 3.1 se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ la funzione $F(x) + c$ con c costante reale arbitraria, è la primitiva più generale possibile nel senso che rappresenta tutte le funzioni la cui derivata è uguale a $f(x)$. Questa primitiva generale prende il nome di *integrale indefinito* di $f(x)$ e si rappresenta col simbolo $\int f(x)\,dx$:

$$\int f(x)\,dx \triangleq F(x) + c \iff F'(x) = f(x)$$

La funzione $f(x)$ sotto il segno di integrale è detta *funzione integranda*, mentre x prende il nome di *variabile di integrazione*.

Osservazione 3.4. Il simbolo di integrale ricorda quello di una lettera "S" allungata, infatti come vedremo quando parleremo di integrale definito questo è il limite di una sommatoria.

Proposizione 3.2 (Proprietà distributiva)**.** Consideriamo due funzioni f_1 e f_2 continue in (a, b). *L'integrale indefinito di una combinazione lineare è pari alla combinazione lineare degli integrali.* In simboli, con riferimento a 2 funzioni (ma si può generalizzare al caso di n)

$$\boxed{\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\,dx = c_1 \int f_1(x)\,dx + c_2 \int f_2(x)\,dx \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Detta $F(x)$ una primitiva della combinazione lineare, per definizione di primitiva

$$F'(x) = c_1 f(x) + c_2 f(x) \tag{3.2}$$

e dette $F_1(x)$, $F_2(x)$ due primitive di $f_1(x)$ e $f_2(x)$, per definizione di primitiva

$$F_1'(x) = f_1(x), \qquad F_2'(x) = f_2(x), \tag{3.3}$$

dal confronto tra la (3.2) e la (3.3) si ha

$$F'(x) = c_1 F_1'(x) + c_2 F_2'(x)$$

Se le derivate delle primitive sono uguali anche le primitive (a meno di una costante) per cui si ha la (3.1). □

3.1.1 Integrali indefiniti fondamentali

Ricordando le derivate fondamentali viste nel paragrafo 2.3 a pagina 148 possiamo ricavare i seguenti integrali indefiniti fondamentali, in cui con c, c' indichiamo generiche costanti reali:

- Integrali indefiniti delle funzione potenza:

$$\int dx = x + c \tag{3.4}$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\} \tag{3.5}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \tag{3.6}$$

Nell'integrale (3.5) l'operazione di integrazione si intende eseguita in un intervallo che dipende da α, infatti la funzione x^α è continua, in generale, in un insieme che contiene intervalli, perché, ad esempio, se $\alpha = -3$, x^{-3} è definita e continua in $\mathbb{R} - \{0\}$ e quindi l'insieme di definizione è l'unione di due intervalli e l'operazione di integrazione indefinita si intende eseguita nell'intervallo $]0, +\infty[$ o nell'intervallo $]-\infty, 0[$ quindi per ogni $x \in]0, +\infty[$ o per ogni $x \in]-\infty, 0[$ la primitiva di x^α ha l'espressione indicata nella (3.5). Notiamo inoltre che per $\alpha = 0$ l'integrale (3.5) diventa l'integrale (3.4), mentre è stato scritto che la formula (3.5) non vale per $\alpha = -1$ perché in questo caso si ha $x^{-1} = 1/x$ e quindi vale la formula (3.6). La (3.6) si intende definita in $]0, +\infty[$ o in $]-\infty, 0[$, infatti per $x = 0$ non ha significato né $\ln|x|$ né $1/x$.

- Integrali indefiniti della funzione esponenziale

$$\boxed{\begin{aligned} &\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad \forall\, 0 < a \neq 1 \\ &\int e^x = e^x + c \end{aligned}}$$

(3.7)
(3.8)

- Integrale indefinito delle funzioni goniometriche

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \tag{3.9}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \tag{3.10}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c \tag{3.11}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c \tag{3.12}$$

L'integrale (3.11) si intende eseguito in uno degli infiniti intervalli in cui la funzione $\tan x$ è continua che coincide col dire che in quell'intervallo $\cos x \neq 0$. Anche l'integrale (3.12) si intende eseguito in uno degli infiniti intervalli in cui ha significato la cotangente.

- Integrale indefinito di funzioni che restituiscono funzioni goniometriche inverse

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c' \tag{3.13}$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c' \tag{3.14}$$

Notiamo che nella (3.13) poiché la funzione integranda è continua in $]-1, 1[$ due primitive detono differire per una costante, dunque deve esistere una costante $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\arcsin x - (-\arccos x) = \arcsin x + \arccos x = k$$

possiamo trovare k ponendo, per esempio, $x = 1$

$$\arcsin 1 + \arccos 1 = k \iff \frac{\pi}{2} + 0 = k$$

dunque $k = \pi/2$ per cui possiamo ricavare la seguente identità

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

che abbiamo ricavato per altra via nel paragrafo 7.7 del volume 2. Ragionando allo stesso modo, dalla (3.14) abbiano che $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ sono primitive della stessa funzione per cui esiste una costante $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\arctan x - (-\operatorname{arccot} x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x = k$$

ponendo per esempio $x = 1$ abbiamo che $k = \pi/2$ quindi possiamo scrivere questa identità

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

- Integrale indefinito di funzioni iperboliche

$$\boxed{\begin{aligned} &\int \cosh x = \sinh x + c && (3.15)\\ &\int \sinh x = \cosh x + c && (3.16)\\ &\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + c && (3.17) \end{aligned}}$$

- Integrale indefinito di funzioni che restituiscono funzione iperboliche inverse

$$\boxed{\begin{aligned} &\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{settsinh} x + c && (3.18)\\ &\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c && (3.19)\\ &\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c && (3.20) \end{aligned}}$$

Riguardo l'integrale (3.19) ricordando che

$$D \operatorname{settsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \forall x \in]1, +\infty[$$

allora si poteva scrivere anche

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{settsinh} x$$

ma ciò non è proprio corretto perché la funzione $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ è definita e continua non solo in $]1, +\infty[$ ma anche in $]-\infty, -1[$, allora per esprimere una primitiva della funzione anche in $]-\infty, -1[$ (dove il settore seno iperbolico non è definito) si ricorre al fatto che

$$\operatorname{settsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

e quindi se la funzione $\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ è tale che la sua derivata ha come espressione $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ anche la funzione $\ln|x + \sqrt{x^2-1}|$ ha come derivata $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ per la stessa ragione per cui la derivata di $\ln|x|$ ha la stessa espressione della deriva di $\ln x$. Dunque la primitiva di $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ è $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$ che se stiamo in $]1,+\infty[$ coincide con $\operatorname{settsinh} x$ mentre in $]-\infty,-1[$ non possiamo parlare di settore seno iperbolico e quindi dobbiamo scriverla col logaritmo. Per la (3.20) il discorso è analogo alla (3.19), cioè l'integrale di $\frac{1}{1-x^2}$ è pari a $\operatorname{setttanh} x$ solo in $]-1,1[$ (infatti solo in tale intervallo è definito il settore tangente iperbolica), ma la funzione $\frac{1}{1-x^2}$ è definita anche $]-\infty,-1[$ e in $]1,+\infty[$ e siccome

$$\operatorname{setttanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

e tali funzioni hanno derivata $\frac{1}{1-x^2}$, ma anche la derivata di

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

vale $\frac{1}{1-x^2}$ solo che la funzione scritta ha significato anche esternamente a $]-1,1[$.

Proposizione 3.3. *Se* $F(x)$ *è primitiva di* $f(x)$ *allora* $F(\varphi(x))$ *è primitiva della funzione* $f(\varphi(x))\varphi'(x)$, *cioè:*[1]

$$D\,F\big(\varphi(x)\big) = f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$$

Dimostrazione. Applicando la regola di derivazione della funzione composta

$$D\,F\big(\varphi(x)\big) = F'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$$

essendo $F(x)$ primitiva di $f(x)$ vuol dire che $F'(x) = f(x)$ che sostituita nella precedente ci dà la tesi. □

1 Naturalmente immaginando che ha senso la funzione $F(\varphi(x))$, cioè possiamo parlare della funzione composta e della derivata della funzione composta.

In base alla proposizione 3.3 dagli integrali indefiniti fondamentali (3.4)–(3.20) possiamo ricavare queste altre formule di integrali indefiniti

$$\int \varphi^{\alpha}(x)\varphi'(x)\,dx = \frac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \tag{3.21}$$

$$\int a^{\varphi(x)}\varphi'(x)\,dx = \frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + c \tag{3.22}$$

$$\int \frac{1}{\varphi(x)}\varphi'(x)\,dx = \ln|\varphi(x)| + c \tag{3.23}$$

$$\int (\cos\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \sin\varphi(x) + c \tag{3.24}$$

$$\int (\sin\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = -\cos\varphi(x) + c \tag{3.25}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2\varphi(x)}\varphi'(x)\,dx = \tan\varphi(x) + c \tag{3.26}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2\varphi(x)}\varphi'(x)\,dx = -\cot\varphi(x) + c \tag{3.27}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}\varphi'(x)\,dx = \arcsin\varphi(x) + c = -\arccos\varphi(x) + c' \tag{3.28}$$

$$\int \frac{1}{1+\varphi^2(x)}\varphi'(x)\,dx = \arctan\varphi(x) + c = -\operatorname{arccot}\varphi(x) + c' \tag{3.29}$$

$$\int \cosh\varphi(x)\varphi'(x)\,dx = \sinh\varphi(x) + c \tag{3.30}$$

$$\int \sinh\varphi(x)\varphi'(x)\,dx = \cosh\varphi(x) + c \tag{3.31}$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2\varphi(x)}\varphi'(x)\,dx = \tanh\varphi(x) + c \tag{3.32}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2(x)}}\varphi'(x)\,dx = \operatorname{settsinh}\varphi(x) + c \tag{3.33}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\varphi^2(x)-1}}\varphi'(x)\,dx = \ln\left|\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x)-1}\right| + c \tag{3.34}$$

$$\int \frac{1}{1-\varphi^2(x)}\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\varphi(x)}{1-\varphi(x)}\right| + c \tag{3.35}$$

Osservazione 3.5. Ricordando la definizione di differenziale

$$d\varphi = \varphi'(x)\,dx$$

in questo modo l'integrale (3.21) diventa uguale a

$$\int \varphi^{\alpha}(x)\,d\varphi$$

e scritto in questo modo l'integrale è formalmente identico all'integrale (3.5) (al posto di x c'è la funzione φ) e quindi è naturale scrivere

$$\int \varphi^{\alpha}(x)\,d\varphi = \frac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

Stesso discorso si può ripetere per tutti gli integrali (3.22)–(3.35).