Dal triangolo rettangolo $PSR$

$$\overline{SR} = \overline{PS} \tan \omega$$

notiamo che $\overline{PS} = \Delta x$, mentre $\tan \omega = f'(x_0)$ quindi la precedente diventa

$$\overline{SR} = f'(x_0)\Delta x$$

Dunque la lunghezza $\overline{SR}$ del segmento $SR$ è il differenziale della funzione $f$ relativo al punto $x_0$. Dalla figura 2.4 è evidente che *il differenziale della funzione $f$ relativo al punto $x_0$ ($\overline{SR}$) è l'incremento che subisce l'ordinata della tangente alla curva in $P_0$ per un incremento $\Delta x$ della variabile indipendente.*

### 2.2.2 Utilità

L'uso che si fa del differenziale è quello di confondere l'incremento $\Delta f$ con il differenziale $df$, geometricamente ciò significa "confondere" $\Delta f$ con $df$ significa sostituire il diagramma della funzione $f$ con il diagramma della sua tangente, a patto di stare in un intorno "sufficientemente piccolo" di $x_0$.

**Teorema 2.2** (del differenziale). *Se la funzione $f$ è derivabile in un punto, la differenza tra l'incremento $\Delta f$ della funzione e il differenziale della funzione $df$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto all'incremento della variabile indipendente:*

$$\boxed{\Delta f - df = o_{x_0}(x - x_0)} \tag{2.14}$$

*Se la derivata è diversa da zero nel punto $x_0$, il differenziale è un infinitesimo del primo ordine e rappresenta la parte principale dell'incremento*

$$f'(x_0) \neq 0 \implies \Delta f \sim df \text{ in } x_0 \tag{2.15}$$

*Dimostrazione.* La (2.14) equivale a dire che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \tag{2.16}$$

La (2.16) è vera in quanto scrivendo il limite nella forma seguente e ricordando la definizione di derivata

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

La (2.15) equivale a dire che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x_0)(x - x_0)} = 1 \tag{2.17}$$

La (2.17) è vera come ci si rende conto scrivendola nel modo seguente

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{f'(x_0)} f'(x_0) = 1 \square$$

## 2.3 DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

In questo paragrafo calcoleremo la funzione derivata delle funzioni elementari. Tale paragrafo andrebbe posto dopo il paragrafo 2.4 a pagina 157 perché in alcune proposizioni che vedremo adesso faremo riferimento alle regole di derivazione presenti nel paragrafo 2.4, tuttavia ho preferito non invertire l'ordine dei paragrafi perché nel paragrafo 2.4 ho messo degli esempi che a loro volta richiedono la conoscenze delle derivate delle funzioni elementari. Le possibili strade sono due: saltare le dimostrazioni di questo paragrafo per poi ritornarci dopo aver studiato il paragrafo 2.4, oppure mano mano che nelle dimostrazioni si fa riferimento a una regola di derivazione (tipo la derivata del prodotto di due funzioni o la derivata dell'inversa) saltare un attimo al paragrafo 2.4 per vederne almeno l'enunciato.

Vi consiglio solo di leggere le dimostrazioni di questo paragrafo, non è importante ricordarle quello che conta è ricordare le formule di derivazione, vi serviranno spesso.

**Proposizione 2.3.** *La derivata della funzione costante è nulla, quella della funzione identica è pari a* $1$*, della funzione potenza è pari all'esponente per la potenza con esponente diminuito di* $1$*, per la funzione radice* $n$*-esima vale il reciproco di* $n$ *per la radice* $n$*-esima della potenza a* $n-1$ *In particolare*

$$D\,c = 0 \qquad c \in \mathbb{R} \text{ costante} \tag{2.18}$$

$$D\,x = 1 \tag{2.19}$$

$$D\,x^{\lambda} = \lambda x^{\lambda-1} \qquad \forall x \in X - \{0\}, \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{1\} \tag{2.20}$$

$$D\,x^{\lambda} = 0 \qquad \text{se } x = 0 \text{ e } \lambda > 1 \tag{2.21}$$

$$D\,x^{\lambda} = +\infty \qquad \text{se } x = 0 \text{ e } 0 < \lambda < 1 \tag{2.22}$$

$$D\,\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \qquad \forall x \in X_n - \{0\}, X_n = \begin{cases} \mathbb{R} & n \text{ dispari} \\ [0, +\infty[ & n \text{ pari} \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\left[D\,\sqrt[n]{x}\right]_{x=0} = +\infty \tag{2.24}$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la (2.18): il rapporto incrementale è nullo, infatti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

e quindi è nullo il suo limite, cioè la sua derivata

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Dimostriamo la (2.19): Il rapporto incrementale è costante pari a 1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$$

passando al limite per $\Delta x$ che tende a zero, abbiamo la derivata che, ovviamente essendo il rapporto incrementale costante, è pari alla costante stessa

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

Dimostriamo la (2.20):

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^{\lambda} - x^{\lambda}}{\Delta x} = \frac{x^{\lambda}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\lambda} - x^{\lambda}}{\Delta x} \\ &= \frac{x^{\lambda}\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\lambda} - 1\right]}{\Delta x} \end{aligned}$$

Moltiplicando e dividendo per $x$ la precedente diventa

$$= \frac{x^{\lambda}}{x} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\lambda}-1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\lambda-1} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\lambda}-1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Passando al limite per $\Delta x$ che tende a zero e ricordando il limite notevole (1.106) a pagina 84 si ha

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = x^{\lambda-1}\lambda$$

Dimostriamo la (2.21) e la (2.22): il rapporto incrementale relativo al punto $x=0$ è

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{\lambda}}{\Delta x} = \Delta x^{\lambda-1}$$

Passiamo al limite per $\Delta x \to 0$ per calcolare la derivata

$$\lim_{\Delta x\to 0} (\Delta x)^{\lambda-1} \tag{2.25}$$

Se $\lambda > 1$, poiché la funzione argomento del limite (2.25) è continua in $x=0$, essa è una funzione potenza di esponente positivo se $\lambda > 1$ quindi il risultato del limite è $0^{+}$ (perché bisogna considerare solo $\Delta x > 0$ visto che la potenza ad esponente reale è definita solo per argomento non negativo), mentre se $0 < \lambda < 1$ l'esponente è negativo e quindi la funzione tende a $+\infty$ perché essa si può scrivere come

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{-\lambda+1}} = \frac{1}{0^{+}} = +\infty$$

Dimostriamo la (2.23): consideriamo prima il caso $n$ pari

$$\forall x \in ]0,+\infty[ \qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

quindi in base alla (2.20)

$$D\,\sqrt[n]{x} = D\,x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Dimostriamo il caso $n$ dispari: ci concentriamo al caso di $x \in ]-\infty,0[$ perché per $x \in ]0,+\infty[$ è già stato dimostrato col caso $n$ pari. Per ogni $x \in ]-\infty,0[$ scriviamo come segue il rapporto incrementale

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[n]{x+\Delta x}-\sqrt[n]{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt[n]{x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}-\sqrt[n]{x}}{\Delta x}$$
$$= \sqrt[n]{x}\frac{\left(\sqrt[n]{1+\frac{\Delta x}{x}}-1\right)}{\Delta x}$$

moltiplicando e dividendo per $x$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{x}\frac{\left(\sqrt[n]{1+\frac{\Delta x}{x}}-1\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

passando al limite per $\Delta x \to 0$ e applicando il limite fondamentale (1.106) a pagina 84 si ha

$$\lim_{\Delta x\to 0} \sqrt[n]{x}\frac{\left(\sqrt[n]{1+\frac{\Delta x}{x}}-1\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{x}{x^{n}}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{1}{x^{n-1}}} = \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Dimostriamo la (2.24): calcoliamo il limite del rapporto incrementale per $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0^+)}{x - 0^+} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[n]{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[n]{\frac{x}{x^n}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[n]{\frac{1}{x^{n-1}}} = +\infty \square$$

**Proposizione 2.4.** *Le derivate delle funzioni esponenziali e logaritmiche sono*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{D}\, a^x = a^x \ln a & \forall x \in \mathbb{R} \quad (a > 0, a \neq 1) \\ \mathrm{D} \log_a x = \dfrac{1}{x} \log_a e = \dfrac{1}{x} \dfrac{1}{\ln a} & \forall x \in ]0, +\infty[ \\ \mathrm{D} \log_a |x| = \dfrac{1}{x \ln a} & \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array}} \quad \begin{array}{r} (2.26) \\ (2.27) \\ (2.28) \end{array}$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la (2.26): per ogni $x \in \mathbb{R}$ il rapporto incrementale è

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

Passiamo al limite per $\Delta x \to 0$ per calcolare la derivata e ricordiamo il limite fondamentale (1.104) a pagina 84

$$\lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \ln a$$

Dimostriamo la (2.27): per ogni $x \in ]0, +\infty[$ il rapporto incrementale è

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{\log_a \left[x \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right] - \log_a x}{\Delta x} \\ &= \frac{\log_a x + \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $x$ e passiamo al limite per $\Delta x \to 0$ per calcolare la derivata e ricordiamo il limite fondamentale (1.103) a pagina 83

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e$$

Dimostriamo la (2.28): osserviamo che

$$\log_a |x| = \begin{cases} \log_a x & \text{se } x > 0 \\ \log_a -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Per $x > 0$ abbiamo già dimostrato con la (2.27); per $x < 0$ applichiamo la regola di derivazione delle funzioni composte

$$\mathrm{D} \log_a (-x) = \frac{1}{(-x) \ln a} (-1) = \frac{1}{x \ln a} \qquad \square$$

**Osservazione 2.7.** Le (2.26), (2.27), (2.28) nel caso $a = e$ (numero di Nepero) diventano, rispettivamente,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{D}\, e^x = e^x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \mathrm{D} \ln x = \dfrac{1}{x} & \forall x \in ]0, +\infty[ \\ \mathrm{D} \ln |x| = \dfrac{1}{x} & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}} \quad \begin{array}{r} (2.29) \\ (2.30) \\ (2.31) \end{array}$$

ovvero *la derivata dell'esponenziale, a base* $e$, *è l'esponenziale stesso* e *la derivata del logaritmo neperiano è* $1/x$.

**Proposizione 2.5.** *Le derivate delle funzioni circolari sono*

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\mathrm{D}\sin x = \cos x & \forall x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{D}\cos x - \sin x & \forall x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{D}\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x & \forall x \in \mathbb{R} - \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right\} \\
\mathrm{D}\cot x = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) & \forall x \in \mathbb{R} - \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{ k\pi \}
\end{array}
}
\begin{array}{r}
(2.32) \\ (2.33) \\ (2.34) \\ (2.35)
\end{array}
$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la (2.32): per ogni $x \in \mathbb{R}$ il rapporto incrementale è

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} &= \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\
&= \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \\
&= \sin x \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

Passando al limite per $\Delta x \to 0$ e ricordando i limiti fondamentali (1.96) a pagina 81, (1.100) a pagina 83 si ha

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x \to 0} \sin x \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \sin x \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\
&= 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x
\end{aligned}
$$

Dimostriamo la (2.33): per ogni $x \in \mathbb{R}$ il rapporto incrementale è

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} &= \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} \\
&= \frac{\cos x(\cos \Delta x - 1) - \sin x \sin \Delta x}{\Delta x} \\
&= \cos x \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

Passando al limite per $\Delta x \to 0$ e ricordando i limiti fondamentali (1.96) a pagina 81, (1.100) a pagina 83 si ha

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x \to 0} \cos x \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \cos x \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\
&= 0 - \sin x = -\sin x
\end{aligned}
$$

Dimostriamo la (2.34): applichiamo la seconda identità fondamentale della trigonometria (cioè $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$) e la regola di derivazione del rapporto

$$
\mathrm{D}\tan x = \mathrm{D}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\mathrm{D}\sin x)\cos x - \sin x\, \mathrm{D}(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}
$$

A questo punto se scomponiamo la frazione in due abbiamo $1 + \tan^2 x$ mentre se applichiamo la prima identità fondamentale della trigonometria ($\sin^2 + \cos^2 x = 1$) si ha $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Dimostriamo la (2.35): applichiamo la definizione di cotangente e la regola di derivazione del rapporto

$$\mathrm{D}\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(\mathrm{D}\cos x)\sin x - \cos x\,\mathrm{D}(\sin x)}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

A questo punto se scomponiamo la frazione in due abbiamo $-(1+\cot^2 x)$ mentre se applichiamo la prima identità fondamentale della trigonometria ($\sin^2 + \cos^2 x = 1$) si ha $-\frac{1}{\sin^2 x}$. □

**Osservazione 2.8.** Per le funzioni trigonometriche bisogna sempre pensare che l'angolo sia in radianti, infatti se fosse in gradi le formule in genere variano, ad esempio dalla (1.98) a pagina 82 discende che se $x$ è in gradi

$$\mathrm{D}\sin x = \frac{\pi}{180}\cos x \qquad \mathrm{D}\cos x = -\frac{\pi}{180}\sin x$$

**Proposizione 2.6.** *Le derivate delle funzioni inverse delle funzioni circolari sono*

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\mathrm{D}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \forall x \in ]-1,1[ \\
\left[\mathrm{D}\arcsin x\right]_{x=-1} = \left[\mathrm{D}\arcsin x\right]_{x=1} = +\infty & \\
\mathrm{D}\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \forall x \in ]-1,1[ \\
\left[\mathrm{D}\arccos x\right]_{x=-1} = \left[\mathrm{D}\arcsin x\right]_{x=1} = -\infty & \\
\mathrm{D}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2} & \forall x \in \mathbb{R}
\end{array}}$$

(2.36), (2.37), (2.38), (2.39), (2.40)

*Dimostrazione.* Dimostriamo la (2.36): per ogni $x \in [-1,1]$ la funzione $y = \arcsin x$ è la funzione inversa di $x = \sin y$; per il teorema di derivabilità dell'inversa di una funzione invertibile si ha

$$\mathrm{D}\arcsin x = \frac{1}{[\mathrm{D}\sin y]_{y=\arcsin x}}$$

la funzione $\sin y$ è derivabile nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ed è ivi strettamente crescente, ma la sua derivata $\cos y$ si annulla negli estremi di tale intervallo, quindi la funzione $\arcsin x$ è derivabile nell'intervallo $]-1,1[$; dunque per ogni $x \in ]-1,1[$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\arcsin x &= \frac{1}{[\mathrm{D}\sin y]_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\cos\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

notiamo che nel passaggio dal terzultimo al penultimo membro si è preso solo il segno $+$ davanti alla radice perché l'arco è stato limitiate fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ dove il coseno è sempre positivo. Dimostriamo la (2.37): calcoliamo la derivata negli estremi $\pm 1$

$$\mathrm{D}\arcsin x = \frac{1}{[\mathrm{D}\sin y]_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{[\cos y]_{y=\arcsin x}}$$

notiamo

$$\lim_{x\to -1^+} = \arcsin x = -\frac{\pi}{2}^+ \qquad \lim_{x\to 1^-} = \arcsin x = \frac{\pi}{2}^-$$

quindi per $y \to -\frac{\pi}{2}^-$ che per $y \to \frac{\pi}{2}^+$ il coseno tende a $0^+$ dunque

$$\mathrm{D}\arcsin x = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Dimostriamo la (2.38): per ogni $x \in [-1, 1]$ la funzione $y = \arccos x$ è la funzione inversa di $x = \cos y$; per il teorema di derivabilità dell'inversa di una funzione invertibile si ha

$$\mathrm{D}\arccos x = \frac{1}{[\mathrm{D}\cos y]_{y=\arccos x}}$$

la funzione $\cos y$ è derivabile nell'intervallo $[0, \pi]$ ed è ivi strettamente decrescente, ma la sua derivata $-\sin y$ si annulla negli estremi di tale intervallo, quindi la funzione $\arccos x$ è derivabile nell'intervallo $]-1, 1[$; dunque per ogni $x \in ]-1, 1[$ si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\arccos x &= \frac{1}{[\mathrm{D}\cos y]_{y=\arccos x}} = \frac{1}{-\sin\arccos x} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

notiamo che nel passaggio dal terzultimo al penultimo membro si è preso solo il segno $+$ davanti alla radice perché l'arco è stato limitato fra $0$ e $\pi$ dove il seno è sempre positivo. Dimostriamo la (2.39): calcoliamo la derivata negli estremi $\pm 1$

$$\mathrm{D}\arccos x = \frac{1}{[\mathrm{D}\cos y]_{y=\arccos x}} = \frac{1}{[-\sin y]_{y=\arccos x}}$$

notiamo

$$\lim_{x\to -1^+} = \arccos x = \pi^- \qquad \lim_{x\to 1^-} = \arccos x = 0^+$$

quindi sia per $y \to \pi^-$ che per $y \to 0^+$ il seno tende a $0^+$ dunque

$$\mathrm{D}\arccos x = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

Dimostriamo la (2.40): per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione $y = \arctan x$ è la funzione inversa di $x = \tan y$; per il teorema di derivabilità dell'inversa di una funzione invertibile si ha

$$\mathrm{D}\arctan x = \frac{1}{[\mathrm{D}\tan y]_{y=\arctan x}}$$

la funzione $\tan y$ è derivabile in $-]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ed è ivi strettamente crescente, ma la sua derivata $1/\cos^2 x$ non si annulla in alcun punto di $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan x$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e si ha

$$\mathrm{D}\arctan x = \frac{1}{[\mathrm{D}\tan y]_{y=\arctan x}} = \cos^2(\arctan x) \tag{2.41}$$

Ricordando che

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

dividendo per $\cos^2 x$ (che è sempre diverso da zero in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) si ha

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \iff \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

quindi la (2.41) diventa uguale a

$$= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{x^2} \qquad \square$$

**Proposizione 2.7.** *Le derivate delle funzioni iperboliche sono*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{D}\sinh x = \cosh x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \mathrm{D}\cosh x = \sinh x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \mathrm{D}\tanh x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}} \qquad \begin{array}{r} (2.42) \\ (2.43) \\ (2.44) \end{array}$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la (2.42): ricordiamo la definizione di seno iperbolico

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

si ha

$$\mathrm{D}\sinh x = \mathrm{D}\,\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{D}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

Dimostriamo la (2.43): ricordiamo la definizione di coseno iperbolico

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

si ha

$$\mathrm{D}\cosh x = \mathrm{D}\,\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

Dimostriamo la (2.44): per definizione di tangente iperbolica

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\tanh x &= \mathrm{D}\,\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(\mathrm{D}\sinh x)\cosh x - \sinh x(\mathrm{D}\cosh x)}{\cosh^2} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \end{aligned}$$

ricordando che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ si ha la (2.44). □

**Proposizione 2.8.** *Le derivate delle funzioni inverse delle funzioni iperboliche sono*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{D}\,\mathrm{settsinh}\, x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \forall x \in \mathbb{R} \\ \mathrm{D}\,\mathrm{settcosh}\, x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \forall x \in ]1, +\infty[ \\ [\mathrm{D}\,\mathrm{settcosh}\, x]_{x=1} = +\infty & \\ \mathrm{D}\,\mathrm{setttanh}\, x = \dfrac{1}{1-x^2} & \forall x \in ]-1, 1[ \end{array}} \qquad \begin{array}{r} (2.45) \\ (2.46) \\ (2.47) \\ (2.48) \end{array}$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la (2.45): per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione $y = \mathrm{settsinh}\, x$ è la funzione inversa di $x = \sinh y$. Per il teorema di derivabilità dell'inversa di una funzione invertibile (teorema 2.3 a pagina 161) si ha

$$\mathrm{D}\,\mathrm{settsinh}\, x = \frac{1}{[\mathrm{D}\sinh y]_{y=\mathrm{settsinh}\, x}}$$

Poiché la funzione $\sinh y$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e la derivata $\cosh y$ è diversa da zero e si ha

$$\mathrm{D}\,\mathrm{settsinh}\, x = \frac{1}{[\mathrm{D}\sinh y]_{y=\mathrm{settsinh}\, x}} = \frac{1}{\cosh(\mathrm{settsinh}\, x)} \tag{2.49}$$

ricordando che

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Leftrightarrow \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x \Leftrightarrow \cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$$

in cui si è preso solo il segno + davanti alla radice perché $\cosh x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sostituendo nella (2.49) si

$$D \operatorname{settsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{settsinh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Dimostriamo la (2.46): per ogni $x \in [1, +\infty[$ la funzione $y = \operatorname{settcosh} x$ è la funzione inversa di $x = \cosh y$. Per il teorema di derivabilità dell'inversa di una funzione invertibile si ha

$$D \operatorname{settcosh} x = \frac{1}{[D \cosh y]_{y=\operatorname{settcosh} x}}$$

La funzione $\cosh y$ è derivabile nell'intervallo $[1, +\infty[$ ed ivi strettamente crescente ma la sua derivata $\sinh y$ si annulla per $y = 0$ e tale valore si ottiene quando per $x = 1$ in $\operatorname{settcosh} x$. Quindi per ogni $x \in ]1, , +\infty[$ abbiamo

$$D \operatorname{settcosh} x = \frac{1}{[D \cosh y]_{y=\operatorname{settcosh} x}} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{settcosh} x)} \tag{2.50}$$

Ricordando che

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Leftrightarrow \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x \Leftrightarrow \sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$$

dove davanti alla radice si è preso solo il segno + perché nell'intervallo $]1, +\infty[$ che stiamo considerando $\sinh x > 0$. Sostituendo nella (2.50) si ha

$$D \operatorname{settcosh} x = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{settcosh} x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Per $x$ che tende a 1 da destra $\operatorname{settcosh} x$ tende a $0^+$ di tende a $0^+$ anche $\sinh(\operatorname{settcosh} x)$ quindi la (2.50) diventa $1/0^+$ che è pari a $+\infty$, il che dimostra la (2.47).
Dimostriamo la (2.48): come sappiamo per ogni $x \in ]-1, 1[$ la funzione $y = \operatorname{setttanh} x$ è la funzione inversa di $x = \tanh y$. Per il teorema di derivabilità dell'inversa di una funzione invertibile

$$D \operatorname{setttanh} x = \frac{1}{[D \tanh y]_{y=\operatorname{setttanh} x}}$$

Poiché la funzione $\tanh y$ è derivabile in $]-1, 1[$ (ed è ivi strettamente crescente) e la sua derivata $\frac{1}{\cosh^2 x}$ è sempre diversa da 0 (dato che $\cosh^2 x \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$)

$$D \operatorname{setttanh} x = \frac{1}{[D \tanh y]_{y=\operatorname{setttanh} x}} = \cosh^2(\operatorname{setttanh} x) \tag{2.51}$$

Ricordando che

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

dividendo per $\cosh^2 x$ si ha

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \iff \cosh^2 x = \frac{1}{1 - \tanh^2}$$

sostituendo nella (2.51) si ha

$$D \operatorname{setttanh} x = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{setttanh} x)} = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \square$$

## 2.4 REGOLE DI DERIVAZIONE

In questo paragrafo $f$, $g$ indicano funzioni reali di variabile reale definite in un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$.

**Proposizione 2.9.** *Se $f$, $g$ sono entrambe derivabili in un punto, anche la loro somma è derivabile e si ha che la derivata della somma è la somma delle derivate.* In simboli

$$\boxed{D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)} \tag{2.52}$$

*Dimostrazione.* Indichiamo con $s(x)$ la somma $f(x) + g(x)$, e consideriamo il rapporto incrementale di $s(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s(x)}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Passando al limite per $\Delta x \to 0$ (e ricordando che il limite di una somma è la somma dei limiti)

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x) \quad \square \end{aligned}$$

**Osservazione 2.9.** Ovviamente la (2.52) si generalizza al caso di $n$ funzioni, con $n \in \mathbb{N}$.

**Esempio 2.4.** Calcolare la derivata della seguente funzione

$$f(x) = 3 - x^2 + \sin x + \log_2 x + e^x$$

*Soluzione.* Applichiamo la (2.52)

$$\begin{aligned} f'(x) &= D[3] + D[-x^2] + D[\sin x] + D[\log_2 x] + D[e^x] \\ &= 0 + (-2x) + \cos x + \frac{1}{x} \log_2 e + e^x \\ &= -2x + \cos x + \frac{1}{x} \log_2 e + e^x \end{aligned}$$

**Proposizione 2.10.** *Se $f$, $g$ sono entrambe derivabili in un punto, anche il loro prodotto è derivabile e si ha che la derivata del prodotto è pari alla somma di due prodotti in cui compare la derivata di una funzione per l'altra non derivata.* In simboli

$$\boxed{D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)} \tag{2.53}$$

*Dimostrazione.* Indichiamo con $p(x)$ il prodotto $f(x)g(x)$, e consideriamo il rapporto incrementale di $p(x)$

$$\frac{\Delta p(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

aggiungendo $f(x)g(x+\Delta x)$ al numeratore

$$\begin{aligned}\frac{\Delta p(x)}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{g(x+\Delta x)[f(x+\Delta x) - f(x)] + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\ &= g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

Passando al limite per $\Delta x \to 0$ (e ricordando che il limite di una somma è la somma dei limiti)

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= g(x)f'(x) + f(x)g'(x) \quad \square\end{aligned}$$

**Osservazione 2.10.** Come caso particolare della (2.53) (ricordando che la derivata di una costante è zero) abbiamo che la derivata del prodotto di una costate per una funzione è il prodotto della costante per la derivata della funzione, cioè come si suol dire *la costante si può portare fuori il segno di derivata*:

$$\boxed{D[kf(x)] = k\,D[f(x)] \qquad \forall k \in \mathbb{R}}$$

**Osservazione 2.11.** Nel caso del prodotto di tre o più funzioni, la derivata si può calcolare ragionando a due prodotti alla volta, oppure la scrivendo la somma di tanti termini in cui ogni addendo contiene la derivata di un fattore per gli altri non derivati. Ad esempio, se

$$f(x) = f_1(x)f_2(x)f_3(x)$$

si ha

$$\begin{aligned}f'(x) &= D[f_1(x)f_2(x)]f_3(x) + [f_1(x)f_2(x)]\,D[f_3(x)] \\ &= f_1'(x)f_2(x)f_3(x) + f_1(x)f_2'(x)f_3(x) + f_1(x)f_2(x)f_3'(x)\end{aligned}$$

**Esempio 2.5.** Calcolare la derivata della seguente funzione

$$f(x) = 5\sin x\cos x$$

*Soluzione.* Il 5 essendo costante si può portare fuori il segno di derivata, poi applichiamo la (2.53)

$$\begin{aligned}D[f(x)] &= 5\,D[\sin x\cos x] = 5\big(D[\sin x]\cos x + \sin x\,D[\cos x]\big) \\ &= 5[\cos x\cos x + \sin x(-\sin x)] = 5(\cos^2 x - \sin^2 x)\end{aligned}$$

**Esempio 2.6.** Calcolare la derivata della seguente funzione

$$f(x) = x^7\sin x(4x^3 + x^2)$$

*Soluzione.* Abbiamo il prodotto di tre funzioni, la derivata è la somma di tre addendo in ognuno dei quali compare la derivata di un fattore per gli altri non derivati

$$f'(x) = 7x^6\sin x(4x^3 + x^2) + x^7\cos x(4x^3 + x^2) + x^7\sin x(12x^2 + 2x)$$

**Proposizione 2.11.** *Se* f, g *sono entrambe derivabili in un punto in cui* g *è diversa da zero, anche il loro rapporto è derivabile e si ha*

$$\boxed{D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}} \tag{2.54}$$

*Dimostrazione.* Indichiamo con $r(x)$ la funzione $f(x)/g(x)$, il rapporto incrementale di $r(x)$ è

$$\frac{\Delta r(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

Poiché, per ipotesi, $g(x)$ è derivabile e quindi continua in $x$ e poiché $g(x) \neq 0$, per il teorema della permanenza del segno il rapporto $f(x)/g(x)$ è definito intorno a $x$, quindi l'espressione precedente è

$$\begin{aligned}\frac{\Delta r(x)}{\Delta x} &= \frac{\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

aggiungiamo e sottraiamo a numeratore $f(x)g(x)$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta r(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \left[g(x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]\end{aligned}$$

Passando al limite per $\Delta x \to 0$ e si ha la tesi ricordando che essendo $g(x)$ derivabile e quindi continua si ha che $g(x+\Delta x)$ tende a $g(x)$ per $\Delta x \to 0$. □

**Osservazione 2.12.** Nel caso particolare $f(x) = 1$, e quindi $f'(x) = 0$, la (2.54) diventa la formula della derivata del reciproco di uuna funzione

$$\boxed{D\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}} \tag{2.55}$$

**Esempio 2.7.** Calcolare la derivata della seguente funzione

$$y = \frac{2x+1}{3-5x}$$

*Soluzione.* Si tratta del rapporto tra due funzioni, quindi

$$y' = \frac{2(3-5x) + 5(2x+1)}{(3-5x)^2} = \frac{11}{(3-5x)^2}$$

**Esempio 2.8.** Calcolare la derivata della seguente funzione

$$y = \frac{1}{3x+1}$$

*Soluzione.* Si tratta del reciproco della funzione $3x+1$, per cui

$$y' = -\frac{3}{(3x+1)^2}$$

**Proposizione 2.12.** Siano $f(x)$ e $g(y)$ due funzioni definite rispettivamente nei sottoinsieme $X$ e $Y$ di $\mathbb{R}$ e sia $g \circ f$ la funzione composta per mezzo di $g$ e $f$. *Se $f$ è derivabile in $x_0 \in X$ e $g$ è derivabile in $y_0 = f(x_0) \in Y$, la funzione $g \circ f$ è derivabile in $x_0$ e si ha*

$$\boxed{\left[D\, g(f(x))\right]_{x=x_0} = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)} \tag{2.56}$$

*Dimostrazione.* Il rapporto incrementale di $g$ in $y_0$

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$$

è una funzione non definita in $y_0$ (infatti si annulla il denominatore) ma essendo, per ipotesi, $g$ derivabile; per eliminare tale discontinuità si considera la funzione

$$\omega(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{per } y \in Y - \{y_0\} \\ g'(y_0) & \text{per } y_0 = y \end{cases}$$

ottenuta prolungando il rapporto incrementale di $g(y)$ per continuità in $y_0$. A questo punto per ogni $y \in Y$ si ha

$$g(y) - g(y_0) = \omega(y)(y - y_0) \tag{2.57}$$

infatti se $y \neq y_0$ sostituendo nella precedente l'espressione di $\omega(y)$ si ha l'identità

$$g(y) - g(y_0) = \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}(y-y_0) \iff g(y)-g(y_0) = g(y)-g(y_0)$$

nel caso $y = y_0$ (essendo $\omega(y_0) = g'(y_0)$) si ha ancora una volta un'identità

$$g(y_0) - g(y_0) = g'(y_0)(y_0 - y_0) \iff 0 = 0$$

Ponendo, nella (2.57), $y = f(x)$ e $y_0 = f(x_0)$ e dividendo per $x - x_0$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \omega(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \forall x \in X - \{0\}$$

Passando al limite per $x \to x_0$, poiché per la continuità di $f$ in $x_0$ e quella di $\omega$ in $y_0$ implicano la continuità della funzione composta $\omega(f(x))$ in $x_0$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \omega(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \omega(f(x_0))f'(x_0) \\ &= \omega(y_0)f'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)\end{aligned}$$

□

**Esempio 2.9.** Calcolare la derivata della seguente funzione

$$\sin(1 + x^2)$$

*Soluzione.* La funzione data non è tra quelle elementari (cioè di cui disponiamo di una formula di derivazione) tuttavia è composta da due funzioni elementari (scriviamo prima la componente esterna e poi quella interna)

$$g(y) = \sin y, \quad f(x) = 1 + x^2$$

Applichiamo allora la regola di derivazione delle funzioni composte (2.56)

$$D[g(f(x))] = \cos(1 + x^2)(2x) = 2x\cos(1 + x^2)$$

**Esempio 2.10.** Calcolare la derivata della seguente funzione

$$\sin^2 x$$

*Soluzione.* La funzione data non è tra quelle elementari (cioè di cui disponiamo di una formula di derivazione) tuttavia è composta da due funzioni elementari (scriviamo prima la componente esterna e poi quella interna)

$$g(y) = y^2, \quad f(x) = \sin x$$

Applichiamo allora la regola di derivazione delle funzioni composte (2.56)

$$D[g(f(x))] = 2 \sin x \cos x$$

Ovviamente si poteva arrivare allo stesso risultato osservando che $\sin^2 x = \sin x \sin x$ e applicare la regola del prodotto, ma non conviene si perde più tempo.

**Teorema 2.3.** *Sia* $f$ *una funzione definita in un intervallo, strettamente monotona, che ammette derivata in un punto* $x_0$ *ed è continua in* $x_0$*, allora anche l'inversa* $f^{-1}$ *ammette derivata in* $y_0 = f(x_0)$ *e la derivata dell'inversa è la reciproca della derivata se questa è diversa da zero, mentre se è pari a zero la derivata è* $+\infty$ *[*$-\infty$*] se* $f$ *è strettamente crescente [decrescente].* In simboli

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} f\colon (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \\ f \text{ strettamente monotona;} \\ f \text{ ammette derivata in } x_0 \\ f \text{ continua in } x_0. \end{array}\right) \\ \begin{array}{ll} & f^{-1}(y) \text{ ammette derivata in } y_0 = f(x_0) \text{ e si ha} \\ \Longrightarrow & D\left[f^{-1}(y)\right]_{y=y_0} = \begin{cases} \frac{1}{f'(x_0)} & \text{se } f'(x_0) \neq 0 \\ +\infty & \text{se } f'(x_0) = 0 \text{ e } f \text{ strett. crescente} \\ -\infty & \text{se } f'(x_0) = 0 \text{ e } f \text{ strett. decrescente} \end{cases} \end{array} \end{array}}$$

*Dimostrazione.* Per il corollario 1.47 a pagina 51 la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è continua nel suo insieme di definizione che è $Y = f((a,b))$, inoltre poiché $f$ è continua in $x_0$ per la definizione di continuità in termini di limite si ha

$$\forall J_{y_0} \exists I_{x_0} \subseteq (a,b)\colon \forall x \in I_{x_0} \implies f(x) \in J_{y_0} \tag{2.58}$$

La (2.58) implica che $y_0$ è un punto di accumulazione per l'insieme $Y$ di definizione di $f^{-1}$. Essendo $f^{-1}$ continua in tutto $Y$ e avendo $y_0$ come punto di accumulazione si può parlare di derivata di $f^{-1}$ in $y_0$ cioè del seguente limite

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Tale limite lo possiamo calcolare applicando il teorema sul limite di funzioni composte vedendo la funzione composta da

$$y \to f^{-1}(y), \qquad x \to \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

È banale che

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$$

inoltre $f^{-1}(y) \neq x_0$ per $y \neq y_0$ (dato che $f^{-1}$ è strettamente monotona essendo inversa di $f$ che è strettamente monotona per ipotesi). Inoltre essendo $f$ derivabile in $x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

quindi per il teorema sul limite delle funzioni composte (teorema 1.42 a pagina 45) il limite della funzione composta è pari al limite della componente esterna

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{2.59}$$

Se $f'(x_0) = 0$ il limite (2.59) è $\pm\infty$ a seconda che $f$ è strettamente crescente o decrescente, infatti se $f$ è strettamente crescente [decrescente] il suo rapporto incrementale è (per la proposizione 2.1 a pagina 142) $> 0$ [$< 0$] quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0^+ [0^-]$$

e di conseguenza

$$D\,[f^{-1}(y)]_{y=y_0} = \frac{1}{0^+} = +\infty \left[ D\,[f^{-1}(y)]_{y=y_0} = \frac{1}{0^-} = -\infty \right] \qquad \square$$

**Osservazione 2.13.** Esempi di applicazione del teorema 2.3 sono le dimostrazioni della proposizione 2.8 a pagina 155. Altri esempi li vedremo nel corso del testo.

**Proposizione 2.13.** *Sia $f$ una funzione reale a variabile reale definita in $X \in \mathbb{R}$. Se $f$ è pari e derivabile per ogni $x \in X$ allora la sua derivata è una funzione dispari.*

$$\boxed{f \text{ pari} \implies f' \text{ dispari}} \tag{2.60}$$

*Dimostrazione.* Per definizione di funzione pari

$$f(x) = f(-x) \qquad \forall x \in X$$

Derivando ad ambo i membri e applicando al secondo membro la (2.56):[3]

$$f'(x) = f'(-x) D(-x) \Leftrightarrow f'(x) = -f'(x)$$

che è la definizione di funzione dispari. □

**Proposizione 2.14.** *Sia $f$ una funzione reale a variabile reale definita in $X \in \mathbb{R}$. Se $f$ è dispari e derivabile per ogni $x \in X$ allora la sua derivata è una funzione pari.*

$$\boxed{f \text{ dispari} \implies f' \text{ pari}}$$

*Dimostrazione.* Per definizione di funzione pari

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in X$$

Derivando ad ambo i membri e applicando al primo membro la (2.56)

$$-f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x)$$

che la definizione di funzione pari. □

3 Lo vedremo in dettaglio con la (2.19) a pagina 149 ma per ora fidiamoci che $D(-x) = -1$.

**Proposizione 2.15.** *Sia* $f$ *una funzione reale a variabile reale definita in* $X \in \mathbb{R}$*. Se* $f$ *è periodica di periodo* $\tau$ *e derivabile per ogni* $x \in X$ *allora la sua derivata è ancora una funzione periodica di periodo* $\tau$*.*

$$\boxed{f \text{ periodica di periodo } \tau \implies f' \text{ periodica di periodo } \tau}$$

*Dimostrazione.* Per definizione di funzione periodica di periodo $\tau$:

$$\forall x \in X, \forall k \in \mathbb{Z} \qquad f(x + k\tau) = f(x)$$

derivando ad ambo i membri e applicando al primo membro la (2.56)

$$f'(x + k\tau) = f'(x)$$

che è la definizione di funzione periodica di periodo $\tau$. □

## 2.5 DERIVATE E DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

Sia $f$ una funzione reale di variabile reale definita in $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0$ un punto di $X$ e di accumulazione per $X$, cioè $x \in X \cap D(X)$. Se $f$, supposta derivabile in $x_0$, è derivabile anche in un insieme avente $x_0$ per punto di accumulazione, si pone per la funzione *derivata prima* $f'$ il problema della derivabilità in $x_0$.

Se $f'$ è a sua derivabile in $x_0$, si dice che la funzione $f$ è derivabile due volte in $x_0$; la derivata di $f'$ in $x_0$ si chiama *la derivata seconda di* $f$ *nel punto* $x_0$ e, si indica con uno dei seguenti simboli

$$f''(x_0), \quad f^{(2)}(x_0), \quad \left[D^2 f(x)\right]_{x=x_0}, \quad \ddot{f}(x_0), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$$

Se $X'$ è il sottoinsieme di $X$ in cui $f$ è derivabile due volte, in $X'$ è definita una nuova funzione, quella che ad ogni $x \in X'$ associa il numero $f''(x)$. Tale funzione si chiama la *funzione derivata seconda* di $f$, o anche la *derivata seconda* di $f$ e si indica con uno dei seguenti simboli

$$f'', \quad f^{(2)}, \quad D^2 f, \quad \ddot{f}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}$$

In modo analogo a partire dalla derivata seconda si definisce la *derivata terza* o *derivata del terzo ordine* che si indica con uno dei seguenti simboli

$$f''', \quad f^{(3)}, \quad D^3 f(x), \quad \dddot{f}, \quad \frac{d^3 f}{dx^3}$$

e a partire da questa la *derivata quarta* e così via. La *derivata* $n$*-esima*, o *derivata di ordine* $n$, è definita come la derivata $(n-1)$-esima, e si indica con una delle seguenti notazioni

$$f^{(n)}, \quad D^n f(x), \quad \frac{d^n f}{dx^n}$$

**Esempio 2.11.** La funzione (con $\lambda \neq 1$)

$$f(x) = x^\lambda$$