Soluzione. Il limite dato si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$ e vedremo nel paragrafo 1.12 a pagina 51 come si può dire subito che vale $+\infty$ (è il limite di un polinomio), tuttavia possiamo risolverlo anche con le conoscenze che abbiamo finora basta riscriverlo diversamente

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty}(x^4 - 4x^3) = \lim_{x\to+\infty} x^4\left(1 - \frac{4}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^4 \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{4}{x}\right) \\
&= +\infty(1-0) = +\infty \cdot 1 = +\infty
\end{aligned}
$$

Esercizi

Esercizio 1.1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + 2\cos x}{2x+3} \qquad \left[\frac{2}{3}\right]$$

Esercizio 1.2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3 + x - 5}{2x^2 + 1} \qquad [-\infty]$$

Esercizio 1.3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-3}{x-2} \qquad [+\infty]$$

Esercizio 1.4. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x-1} \qquad [\text{non esiste}]$$

1.8 CONTINUITÀ

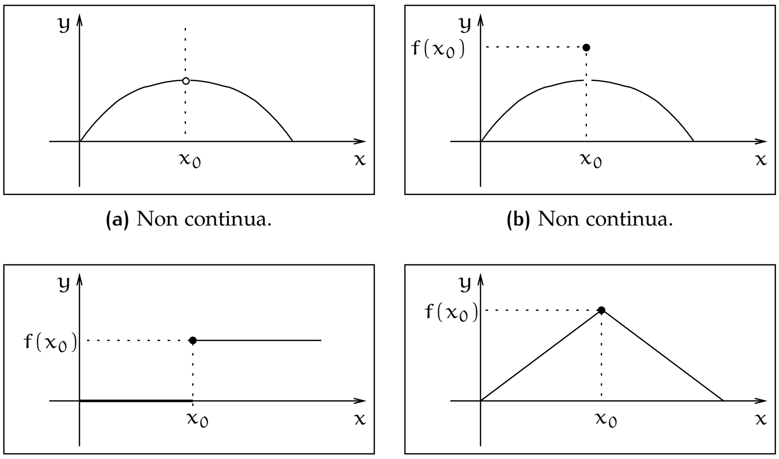
Il concetto di continuità a differenza di quello di limite prende in considerazione il valore della funzione in punto x_0, quindi non richiede nemmeno che x_0 sia un punto di accumulazione. Tuttavia c'è comunque un legame tra continuità e limite, come vedremo con l'osservazione 1.29.

Definizione 1.8. Sia f una funzione reale di variabile reale definita in $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$. Si dice che f è *continua* in x_0 se si ottengono valori di f che si discostano da $f(x_0)$ tanto poco quanto vogliamo purché si prendono punti x vicini ad x_0. In simboli dire che f è continua in x_0 equivale, per definizione, che

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0\colon \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon} \tag{1.61}$$

Osservazione 1.28. *Se x_0 è un punto isolato per X qualunque sia la funzione f definita in X si ha che f è continua in x_0.* Infatti esiste un intorno I di x_0 nel quale non cadono altri punti di X e pertanto i valori che f assume in $X \cap I$ si riducono al solo valore x_0, di conseguenza sostituendo nella disuguaglianza (1.61) si ha

$$|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$$



(a) Non continua.

(b) Non continua.

(c) Non continua.

(d) Continua.

Figura 1.8: Esempi di funzioni continue e non.

Osservazione 1.29. Se x_0 è anche punto di accumulazione per X (cioè $x_0 \in X \cap D(X)$) dire che f è continua in x_0 equivale a dire che esiste il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 e vale x_0. In simboli

$$\boxed{f \text{ continua in } x_0 \in X \cap D(X) \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)} \tag{1.62}$$

Infatti con riferimento all'implicazione verso destra ($\Rightarrow$) il fatto che x_0 è di accumulazione significa che possiamo parlare di limite per x che tende a x_0 di f ed essendo f continua vale la (1.61) che per definizione equivale a dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Viceversa ($\Leftarrow$) dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ equivale per definizione proprio alla (1.61) che è la definizione di f continua in x_0 e inoltre parlare di limite significa che x_0 è di accumulazione per X.

In figura 1.8 ci sono esempi di funzioni continue e non in punto x_0. In particolare nel caso di figura 1.8a la funzione non è continua perché x_0 non appartiene al suo insieme di definizione. In figura 1.8b la funzione è non continua perché $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. In figura 1.8c la funzione è non continua perché è regolare a destra e a sinistra di x_0 ma non in x_0

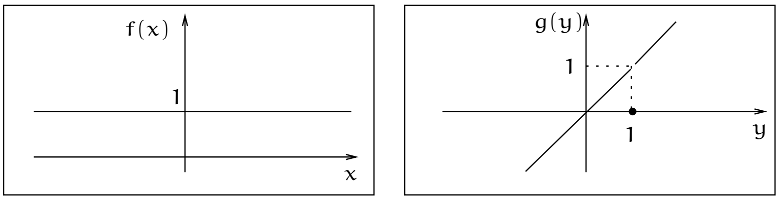
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

In figura 1.8d la funzione è continua in x_0 perché il limite coincide con il valore della funzione in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

1.8.1 Limite funzioni composte

Di seguito vedremo due teoremi che consentono di calcolare il limite di una funzione composta a partire da certe ipotesi sulle funzioni componenti. Entrambi arrivano hanno come tesi che il limite della composta coincide con il limite della componente esterna fatto per la variabile dipendente che tende al limite della componente interna. Mentre il primo teorema richiede la continuità della componente esterna il secondo teorema richiede la semplice convergenza più un'altra ipotesi.



(a) (b)

Figura 1.9: Esempio sul limite delle funzioni composte.

Teorema 1.41. *Sia* f *una funzione definita in un sottoinsieme* X *di* $\mathbb{R}$ *ed a valori in* $\mathbb{R}$ *e sia* g *una funzione definita in un sottoinsieme* Y *di* $\mathbb{R}$ *ed a valori in* $\mathbb{R}$. *Sia* A *l'insieme incluso non strettamente in* X *e diverso dall'insieme vuoto in cui è definita la funzione composta* $g \circ f$, *sia inoltre* x_0 *un punto di accumulazione per* A. *Se la funzione* $f(x)$ *è convergente, per* x *che tende a* x_0 *muovendosi su* A, *a un certo valore* y_0 *e se* $g(y)$ *è continua in* y_0. *Allora la funzione composta* $g \circ f$ *è convergente in* x_0 *al valore* $g(y_0)$. In simboli

$$\left(\begin{array}{l} f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g\colon Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \\ \emptyset \neq A \subseteq X \\ x \in A \subseteq \mathbb{R} \to g(f(x)) \in \mathbb{R} \\ x_0 \text{ punto di accumulazione per } A \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y_0 \\ g(y) \text{ continua in } y_0 \end{array}\right) \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Dimostrazione. L'ipotesi che $g(y)$ è continua in y_0 equivale per definizione

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists h > 0\colon \forall y \in Y \quad |y - y_0| < h \implies |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \tag{1.63}$$

Per ipotesi

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y_0 \tag{1.64}$$

quindi, per definizione di limite, qualunque intorno di y_0 deve esistere un intorno di x_0 in tutti punti, di X, del quale (escluso al più x_0) la funzione appartiene all'intorno di y_0. Come intorno di y_0 visto che se ne può scegliere uno qualunque, scegliamo l'intorno di semidimensione h citato nella (1.63); quindi per definizione di limite (1.64)

$$\exists\, I_{x_0}\colon \forall x \in X \cap I_{x_0} - \{x_0\} \quad f(x) \in \,]y_0 - h, y_0 + h[\tag{1.65}$$

I valori di $f(x)$ che cadono in $]y_0 - h, y_0 + h[$ soddisfano la (1.63), quindi nella (1.63) a y possiamo sostituire $f(x)$ avendo $|g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$. In definitiva tenendo conto delle (1.63) e (1.65) possiamo dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, I_{x_0}\colon \forall x \in X \cap I_{x_0} - \{x_0\} \quad |g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$$

che equivale a dire per definizione $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$. □

Esempio 1.11. Consideriamo le funzioni (figura 1.9)

$$f\colon x \in \mathbb{R} \to 1, \qquad g\colon y \in \mathbb{R} \to \begin{cases} y & \text{per } y \neq 1 \\ 0 & \text{per } y = 1 \end{cases}$$

Notiamo che

$$\forall x \in \bar{\mathbb{R}} \lim_{x\to x_0} f(x) = 1$$

$$\lim_{y\to 1} g(y) = 1$$

L'ultimo limite è diverso da $g(1) = 0$ cioè la funzione g non è continua nel punto 1 quindi non è verificata una delle ipotesi del teorema 1.41 per cui *non* vale che $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = g(y_0)$ (dove nel nostro caso $y_0 = 1$) e infatti la funzione composta nel nostro caso è

$$g \circ f \colon x \in \mathbb{R} \to 0$$

di conseguenza

$$\forall x \in \bar{\mathbb{R}} \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = 0$$

che è diverso da $\lim_{y\to 1} g(y) = 1$

Teorema 1.42. *Sia f una funzione definita in un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}$ e sia g una funzione definita in un sottoinsieme Y di $\mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}$. Sia A l'insieme incluso non strettamente in X e diverso dall'insieme vuoto in in cui è definita la funzione composta $g \circ f$, sia inoltre x_0 un punto di accumulazione per A. Se la funzione $f(x)$ è regolare, per x che tende a x_0 muovendosi su A, a un certo valore $y_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, se esiste un intorno di x_0 (escluso al più x_0) in cui $f(x)$ (con $x \in A$) è diversa da y_0 e se $g(y)$ è regolare in y_0 diciamo l il limite; allora la funzione composta $g \circ f$ è regolare in x_0 al valore l.* In simboli

$$\boxed{\left(\begin{array}{l} f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g\colon Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \\ \emptyset \neq A \subseteq X; \\ x \in A \subseteq \mathbb{R} \to g(f(x)) \in \mathbb{R}; \\ x_0 \text{ punto di accumulazione per } A; \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in A}} f(x) = y_0 \in \bar{\mathbb{R}}; \\ \exists I^*_{x_0} \colon \forall x \in A \cap I^*_{x_0} - \{x_0\}\ f(x) \neq y_0; \\ \lim\limits_{y\to y_0} g(y) = l \in \bar{\mathbb{R}}; \end{array}\right) \implies \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = l}$$

Dimostrazione. Per definizione dire che $\lim_{y\to y_0} g(y) = l$ equivale a

$$\forall J_l\ \exists H_{y_0} \colon \forall y \in Y \cap H_{y_0} - \{y_0\}\ g(y) \in J_l \tag{1.66}$$

Per definizione di limite per la funzione f: per ogni intorno di y_0, e come intorno possiamo considerare H_{y_0} trovato nella (1.66), si ha

$$\exists I_{x_0} \colon \forall x \in A \cap I_{x_0} - \{x_0\}\ f(x) \in H_{y_0} \cap Y \tag{1.67}$$

Se si considera come intorno $\bar{I}_{x_0}$ così definito

$$\bar{I}_{x_0} = I^*_{x_0} \cap I_{x_0}$$

in tale intorno vale la penultima ipotesi del teorema in cui $f(x) \neq y_0$ e contemporaneamente vale la (1.67) in cui $f(x) \in H_{y_0} \cap Y$, cio implica per (1.66) (che richiede appunto che $y \in Y \cap H_{y_0} - \{y_0\}$) che $g(y) \in J_l$ e cioè la nostra tesi. In simboli

$$\forall J_l\ \exists \bar{I}_{x_0} \colon \forall x \in A \cap \bar{I}_{x_0} - \{x_0\}\ \big(f(x) \in Y \cap H_{y_0} - \{y_0\}\big)\ g(f(x)) \in J_l$$

che leggendo tutto esclusa la parte tra parentesi tonde (che abbiamo messo per chiarezza) equivale per definizione a dire

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = l \qquad \square$$

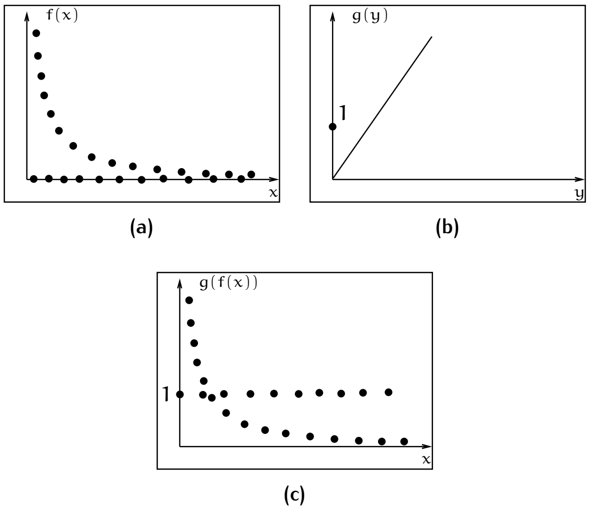


Figura 1.10: Esempio sul limite delle funzioni composte.

Osservazione 1.30. Se c'è divergenza per la funzione f non si avrà bisogno dell'ipotesi dell'esistenza di un intorno di x_0 in cui $f(x) \neq y_0$, perché sicuramente esiste un intorno di infinito in cui la funzione è diversa da infinito (una funzione non può mai assumere valore infinito).

Esempio 1.12. Consideriamo le funzioni seguenti (figura 1.10)

$$f\colon x \in [0, +\infty[\to \begin{cases} 0 & \text{per } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x} & \text{per } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$g\colon y \in [0, +\infty[\to \begin{cases} y & \text{per } y > 0 \\ 1 & \text{per } y = 0 \end{cases}$$

Prendiamo come $x_0 = +\infty$ e calcoliamo il limite di f abbiamo (vedi figura 1.10a)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

mentre (figura 1.10b)

$$\lim_{y \to 0} g(y) = 0$$

La funzione composta è (figura 1.10c)

$$g \circ f\colon x \in [0, +\infty[\to \begin{cases} 1 & \text{per } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x} & \text{per } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

e come si nota dalla figura 1.10c

$$\lim_{x \to +\infty} g(f(x)) \text{ non esiste,}$$

Quindi il teorema 1.42 non è verificato. Il motivo è che in questo esempio non vale l'ipotesi che vuole che in un intorno di x_0 la f si mantiene diversa dal suo limite ($y_0 = 0$), infatti per la proprietà di densità dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ in ogni intorno di un punto qualsiasi $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ cade almeno un punto di $\mathbb{Q}$ in cui nel nostro caso f si annulla.

Di seguito vediamo un teorema che afferma qualcosa di meno forte del teorema 1.41 a pagina 44, ovvero ne è un caso particolare, e quindi non richiede dimostrazione. Ne forniamo l'enunciato in quanto spesso le funzioni verificano direttamente le ipotesi del seguente teorema che probabilmente sono anche più facili da ricordare.

Teorema 1.43. *Sia* f *una funzione definita in un sottoinsieme* X *di* $\mathbb{R}$ *ed a valori in* $\mathbb{R}$ *e sia* g *una funzione definita in un sottoinsieme* Y *di* $\mathbb{R}$ *ed a valori in* $\mathbb{R}$*. Sia* A *l'insieme incluso non strettamente in* X *e diverso dall'insieme vuoto in in cui è definita la funzione composta* $g \circ f$*, sia inoltre* x_0 *un punto di accumulazione per* A*. Se la funzione* $f(x)$ *è continua in* x_0*, diciamo* $y_0 = f(x_0)$*, e se* $g(y)$ *è continua in* y_0*, allora la funzione composta* $g \circ f$ *è continua in* y_0*.* In simboli

$$\boxed{\begin{pmatrix} f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g\colon Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \\ \emptyset \neq A \subseteq X \\ x \in A \subseteq \mathbb{R} \to g(f(x)) \in \mathbb{R} \\ x_0 \text{ punto di accumulazione per } A \\ f(x) \text{ continua in } x_0;\ y_0 = f(x_0); \\ g(y) \text{ continua in } y_0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} \lim_{x \to x_0} g(f(x)) &= g(y_0) \\ &= g(f(x_0)) \end{aligned}}$$

1.8.2 Continuità a destra e a sinistra

Sia f una funzione reale di variabile reale definita in un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$; sia inoltre x_0 un punto di X e di accumulazione per lo meno a sinistra [destra] per X. Se il limite destro di f in x_0 coincide con il valore di f in x_0 si dice che la funzione f è *continua a destra [sinistra]* in x_0; In simboli

$$\boxed{f \text{ continua a destra [sinistra] in } x_0 \in X \cap D(X) \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \begin{aligned} &\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \\ &\left[\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\right] \end{aligned}}$$

Osservazione 1.31. Ovviamente una funzione continua in un punto che è di accumulazione per il suo insieme di definizione è una funzione continua a destra *e* a sinistra in tale punto. Infatti dire che f è continua in x_0 significa dire (avendo supposto x_0 di accumulazione per l'insieme X)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

e a maggiore ragione si ha

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0), \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0);$$

perché una funzione che ammette limite in un punto ammette anche limite sinistro e destro in quel punto ed essi sono uguali tra loro (teorema 1.7 a pagina 15).

Esempio 1.13. Consideriamo la funzione parte intera (volume 2) $y = [x]$ riportata in figura 1.11. Essa è discontinua in ogni punto intero escluso lo zero, cioè $\forall x_0 \in \mathbb{Z} - \{x_0\}$; infatti in tali punti il limite non esiste (il limite sinistro e destro sono diversi). Se però consideriamo un generico punto intero positivo (appartenente a $\mathbb{Z}^+$) si ha il limite sinistro coincide con il valore della funzione in tale punto, ad esempio

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 = f(1)$$

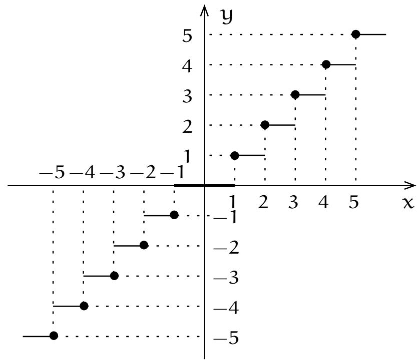


Figura 1.11: Funzione parte intera.

quindi la funzione è continua a destra in ogni punto intero positivo. Analogamente se consideriamo un punto intero negativo (appartenente a $\mathbb{Z}^-$) si ha che il limite sinistro coincide con il valore della funzione in tale punto, ad esempio

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -1 = f(-1)$$

Esempio 1.14. Consideriamo la funzione di Dirichelet

$$f\colon x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Come ben sappiamo la funzione Dirichelet è non regolare per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi è discontinua in ogni punto (perché ogni punto è di accumulazione), ma se si considera la restrizione di f a $\mathbb{Q}$ che è una funzione identicamente nulla si ha

$$\forall x_0 \in \mathbb{Q} \qquad \lim_{x \to x_0} f_{\mathbb{Q}}(x) = 0 = f_{\mathbb{Q}}(x_0),$$

ovvero la restrizione all'insieme dei razionali $f_{\mathbb{Q}}$ è continua in ogni punto di $\mathbb{Q}$. Analogamente la restrizione di f all'insieme $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ è continua in ogni punto di $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Osservazione 1.32. *Notiamo che sono di cose diverse dire "f è continua in $\mathbb{Q}$" e "la restrizione di f a $\mathbb{Q}$ è continua".* Infatti dire che "f è continua in $\mathbb{Q}$" significa dire che in tutti i punti razionali la funzione f è continua, mentre dire che "la restrizione di f a $\mathbb{Q}$ è continua" significa dire che se si considera come dominio di f solo i punti razionali allora la funzione è continua. Quindi in quest'ultimo caso si va a considerare una funzione diversa, con un diverso dominio, mentre nel primo caso la funzione è sempre la stessa ma gode della proprietà di continuità solo nei punti di $\mathbb{Q}$.

1.9 PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Sia f una funzione definita in $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per X ($x_0 \in D(x)$). Si chiamano *punti di discontinuità* della funzione reale f i punti che sono di accumulazione al finito per X ma non appartenenti a X ($x \in D(x)$, $x \notin X$), ed i punti di accumulazione che appartengono ad X ($x \in X \cap D(x)$) nei quali la funzione non è continua. Se x_0 è un punto di discontinuità di f, si dice che f è *discontinua* in x_0 o anche che f *ammette* o *presenta una discontinuità* in x_0. In un punto siffatto, o la funzione non è definita, o se è definita *non* verifica l'uguaglianza

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Le discontinuità di una funzione si classificano in tre tipi

- Discontinuità *eliminabili*.
- Discontinuità *prima specie*.
- Discontinuità *seconda specie*.

1.9.1 Discontinuità eliminabili

Se x_0 è un punto di discontinuità ed esiste finito il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$, diciamolo l, possono verificarsi due eventualità: f non è definita in x_0 (figura 1.8a a pagina 43), oppure f è definita in x_0 ma risulta $f(x_0) \neq l$ (figura 1.8b a pagina 43). In entrambi i casi si dice che la funzione f presenta una *discontinuità eliminabile* in x_0 dato che la funzione g definita ponendo

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in X - \{x_0\}, \\ l & \text{per } x = x_0; \end{cases}$$

è continua in x_0. Se x_0 non appartiene ad X, la funzione $g(x)$ è un prolungamento di f da X all'insieme $X \cup \{x_0\}$, e si chiama *prolungamento per continuità* di f in x_0. Se x_0 appartiene ad X, la funzione g si dice che è la funzione continua ottenuta dalla f *modificandone il valore* in x_0. In entrambi i casi la funzione g si dice ottenuta dalla f *eliminando* la discontinuità in x_0.

1.9.2 Discontinuità di prima specie

Si dice che la funzione f ha in x_0 una *discontinuità prima specie*, quando essa è non regolare in x_0 ma esistono limite destro e limite sinistro diversi tra loro (figura 1.8c a pagina 43). La differenza

$$s(x_0) \triangleq f(x_0^+) - f(x_0^-)$$

si chiama *salto di discontinuità* della funzione f nel punto x_0. Se f ha una discontinuità di prima specie in x_0, f può essere definita o meno in x_0; se essa vi è definita le differenze

$$s^-(x_0) \triangleq f(x_0) - f(x_0^-), \qquad s^+(x_0) \triangleq f(x_0^+) - f(x_0),$$

si chiamano, rispettivamente, il *salto (di discontinuità) a sinistra* ed il *salto (di discontinuità) a destra* in x_0. Ovviamente si ha

$$s(x_0) = s^+(x_0) - s^-(x_0).$$

1.9.3 Discontinuità di seconda specie

Una funzione f ha in x_0 una *discontinuità seconda specie*, quando almeno uno tra il limite destro e quello sinistro non esiste o è infinito. Notiamo che se x_0 è un punto di discontinuità di seconda specie non è escluso che la funzione sia continua a destra oppure a sinistra od anche che sia prolungabile in una funzione continua a sinistra (ma non a destra) o continua a destra (ma non a sinistra) in x_0.