8 SPAZI AFFINI

Con questo capitolo inizia la parte di geometria. Non è difficile e consiglio di leggersi anche le dimostrazioni, il problema è che non siamo abituati a pensare alla geometria in questo modo, quindi vi richiederà parecchie lettura ma alla fine vi darà belle soddisfazioni, riuscendo ad applicare pochi e potenti concetti a tanti casi. Il paragrafo riassuntivo c'è ma, sinceramente, credo non porti molti benefici; meglio leggersi il capitolo saltando le dimostrazioni.

8.1 GENERALITÀ

Definizione 8.1. Si chiama *spazio affine sul campo* $\mathbb{K}$ una terna $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \pi)$, costituita da uno spazio vettoriale $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ su $\mathbb{K}$, da un insieme $\mathcal{A}$ e da un'applicazione che associa ad ogni coppia (P, Q) di elementi di $\mathcal{A}$ il vettore $\pi(P, Q)$, che indichiamo con $\overrightarrow{PQ}$, di $\overrightarrow{\mathcal{A}}$

$$\pi\colon (P, Q) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \pi(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$$

soddisfacente i seguenti assiomi

$$\forall \boldsymbol{v} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}, \forall P \in \mathcal{A},\ \exists! Q \in \mathcal{A} \colon \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{v} \tag{8.1}$$

$$\forall P, Q, R \in \mathcal{A}, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} \tag{8.2}$$

dove la (8.2) è detta *relazione Charles*. Uno spazio affine sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali [$\mathbb{C}$ dei numeri complessi] è detto *spazio affine reale* [*spazio affine complesso*]. L'insieme $\mathcal{A}$ è detto *sostegno* dello spazio affine $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \pi)$ ed i suoi elementi sono detti *punti*. Un elemento (P, Q) di $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ è detto *segmento orientato*, avente P quale *primo estremo* e Q quale *secondo estremo*. Gli elementi di $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ sono detti *vettori liberi*, il vettore libero nullo è indicato con $\overrightarrow{0}$. Lo spazio dei vettori liberi $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ è detto, talvolta, anche *spazio direttore*. Se $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \pi)$ è uno spazio affine sul campo $\mathbb{K}$ si dice, spesso, per brevità e con abuso di linguaggio che $\mathcal{A}$ è uno spazio affine sul campo $\mathbb{K}$, avente $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ quale spazio dei vettori liberi.

Osservazione 8.1. Come per gli spazi vettoriali, lo stesso insieme $\mathcal{A}$ può essere sostegno di differenti spazi affini.

Definizione 8.2. Se $\mathcal{A}$ è uno spazio affine, si dice che due segmenti orientati (P, Q) e (R, S) sono *equipollenti* e si scrive $(P, Q) \equiv (R, S)$ se hanno la stessa immagine tramite π. In simboli

$$(P, Q) \equiv (R, S) \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$$

Proposizione 8.1. *La relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. Ogni segmento è equipollente a se stesso (proprietà riflessiva); se AB è un segmento orientato equipollente a un altro CD banalmente

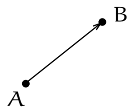

Figura 8.1: Segmento orientato della geometria elementare.

anche CD è equipollente ad AB (proprietà simmetrica); se AB è equipollente a BC e BC è equipollente a un segmento orientato DE allora banalmente anche AB è equipollente a DE (proprietà transitiva). Visto che valgono le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva allora la relazione di equipollenza è di equivalenza. □

Dopo aver dato alcune definizioni vedremo il caso più interessante di spazi affini reali (cioè in cui il campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), ovvero quello dei punti della geometria elementare. Per mostrare che lo spazio dei punti della geometria elementare è uno spazio affine reale, diamo alcune definizioni e postulati che ci ricordano quanto già sappiamo dal volume 2.

Definizione 8.3. Indicando con Σ l'insieme dei punti (dello spazio) della geometria elementare, in tale insieme un *segmento orientato* è un segmento che unisce una coppia di punti $(A, B) \in \Sigma \times \Sigma$, dove A è detto *primo estremo* e B *secondo estremo*, e viene indicato con (A, B) o AB e graficamente con una freccia da A verso B come in figura 8.1.
Mentre, indichiamo con $\vec{\Sigma}$ l'insieme dei vettori liberi dello spazio (cioè delle "frecce" che non hanno un punto di applicazione ma stesso verso direzione e lunghezza) della geometria elementare (definiti insieme alle loro operazioni e proprietà nel volume 2 e che comunque ora velocemente riprenderemo), che è facilmente verificabile essere uno spazio vettoriale sul campo reale.

Definizione 8.4. Due segmenti orientati (A, B), (B, C) di Σ, si dicono *equipollenti* se hanno la stessa direzione, verso e lunghezza e cioè sono lati opposti di un parallelogramma.

Postulato 8.1 (del trasporto parallelo)**.** *Dato un vettore $\overrightarrow{AB} \in \vec{\Sigma}$ e dato un punto $P \in \Sigma$ esiste un solo punto $Q \in \Sigma$ tale che $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.*

Definizione 8.5. Dati due vettori liberi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in \vec{\Sigma}$ per *somma* di $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si intende il vettore libero, che si indica con $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, che si ottiene costruendolo col metodo del parallelogramma (vedi volume 2).

Definizione 8.6. Dato un vettore (libero) $\overrightarrow{AB} \in \vec{\Sigma}$ e uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$, per prodotto tra lo scalare α e il vettore $\overrightarrow{AB}$, che si indica con $\alpha\overrightarrow{AB}$, si intende il vettore libero che ha la stessa direzione di $\overrightarrow{AB}$, lunghezza pari a $|\alpha|\overrightarrow{AB}$ e verso concorde con $\overrightarrow{AB}$ se $\alpha > 0$, discorde se $\alpha < 0$ (vedi volume 2).

Osservazione 8.2. Per come è definita la somma tra vettori liberi, vale la seguente proprietà: dati tre punti qualunque $A, B, C \in \Sigma$ si ha

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \tag{8.3}$$

cioè *vale la relazione di Charles per i vettori liberi*.

Proposizione 8.2. *La terna $(\Sigma, \vec{\Sigma}, \pi)$, è uno spazio affine sul campo reale,* dove π è l'applicazione che a una coppia di punti (A, B) di $\Sigma \times \Sigma$ (cioè ad un segmento orientato) associa un vettore libero $\overrightarrow{AB} \in \vec{\Sigma}$

$$\pi\colon (A, B) \in \Sigma \times \Sigma \to \overrightarrow{AB} \in \vec{\Sigma}$$

Dimostrazione. Per quanto visto nell'esercizio 2.1 a pagina 69 $\overrightarrow{\Sigma}$ è uno spazio vettoriale reale, la proprietà del trasporto parallelo è proprio la (8.1), come visto con la (8.3) vale la relazione di Charles, per cui la terna data è uno spazio affine. □

Osservazione 8.3. Proprio perché $(\Sigma, \overrightarrow{\Sigma}, \pi)$ è uno spazio affine gli elementi $(A, B) \in \Sigma \times \Sigma$ e $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\Sigma}$ li abbiamo chiamati, rispettivamente, segmento orientato e vettore libero.

Osservazione 8.4. Siccome la relazione di equipollenza tra segmenti orientati è una relazione di equivalenza possiamo considerare l'insieme quoziente di Σ, rispetto a tale relazione che indichiamo con $\overrightarrow{\Sigma}$. Il generico elemento di $\overrightarrow{\Sigma}$ è la classe di equivalenza di tutti i segmenti equipollenti, tale elemento è detto *vettore libero ordinario dello spazio* e si indica con $\overrightarrow{AB}$ (dove A e B sono gli estremi di un segmento che appartiene a tale classe di equivalenza).

Proposizione 8.3. *Sia* $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \pi)$ *uno spazio affine sul campo* $\mathbb{K}$, *per ogni punto* $P, Q, P', Q' \in \mathcal{A}$ *si ha*

A. *Gli estremi coincidono se e solo se il vettore libero corrispondente è pari al vettore nullo:*

$$\boxed{P = Q \iff \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}} \tag{8.4}$$

B. *Cambiando l'ordine degli estremi il vettore libero corrispondente cambia segno*

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}} \tag{8.5}$$

C. *Se due vettori liberi coincidono allora coincidono anche i vettori liberi fatti rispettivamente con i primi estremi e con i secondi estremi*

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \implies \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}} \tag{8.6}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (8.4) nel verso $\Rightarrow$: applichiamo la relazione di Charles nel caso di estremi coincidenti

$$\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} \Leftrightarrow \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{0} \tag{8.7}$$

essendo per ipotesi $P = Q$ segue che $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$.
Dimostriamo la (8.4) nel verso $\Leftarrow$: dalla (8.7) sappiamo che $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{0}$ e per ipotesi $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$ da cui per la (8.1) segue che $P = Q$.
Dimostriamo la (8.5): per la relazione di Charles

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP}$$

per quanto visto con la (8.4) $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{0}$, quindi la precedente diventa

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$$

Dimostriamo la (8.6): per la relazione di Charles (e aiutandosi dalla figura 8.2 nel caso spazio affine della geometria elementare)

$$\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'}$$
$$\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'}$$

uguagliando membro a membro e tenendo conto che per ipotesi $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} \Leftrightarrow \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'}$$ □

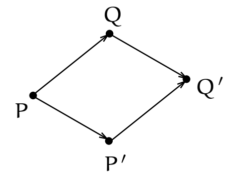

Figura 8.2: Proprietà degli spazi affini.

Proposizione 8.4. *Dato uno spazio affine qualunque* $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \pi)$*, l'applicazione* π *è suriettiva.*

Dimostrazione. Per l'assioma (8.1) a pagina 319 di uno spazio affine, preso un qualunque vettore $\boldsymbol{v} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ esso è immagine, addirittura in infiniti modi, di una coppia di punti, quindi π è suriettiva; infatti, per esempio, possiamo fissare di volta in volta in modo diverso il punto $P \in \mathcal{A}$ e calcolare l'altro estremo Q tale che $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{v}$. □

Definizione 8.7. Uno spazio affine $\mathcal{A}$ è detto di *dimensione finita* se lo spazio dei vettori liberi $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ ha dimensione finita, e in tal caso si chiama *dimensione* dello spazio affine $\mathcal{A}$ la dimensione dello spazio dei vettori liberi $\overrightarrow{\mathcal{A}}$.

$$\dim \mathcal{A} \triangleq \dim \overrightarrow{\mathcal{A}} \tag{8.8}$$

Se $\dim \mathcal{A}$ è pari a 0, 1, 2, 3 allora $\mathcal{A}$ è detto, rispettivamente, *punto*, *retta affine*, *piano affine*, *spazio affine ordinario* (capiremo con l'osservazione 8.9 a pagina 325 il perché di tali nomi). Uno spazio affine di dimensione $n-1$ è detto *iperpiano*. L'insieme vuoto si può ritenere o meno essere uno spazio affine, se lo si ritiene gli si attribuisce convenzionalmente dimensione -1.

Osservazione 8.5. Se $\dim \mathcal{A} = 0$ allora (visto che vale la (8.8)) $\overrightarrow{\mathcal{A}} = \{\, \overrightarrow{0} \,\}$, dunque per la (8.4) nel verso $\Leftarrow$ l'insieme $\mathcal{A}$ è costituito da un singolo punto.

Proposizione 8.5. *La terna* $(\overrightarrow{V}, V, \pi)$*, dove* $\overrightarrow{V}$ *e* V *sono lo stesso insieme fatto da uno spazio vettoriale* $\boldsymbol{V}$ *sul campo* $\mathbb{K}$*, in cui quindi i suoi elementi sono pensati sia come vettori (in tal caso lo indichiamo con* $\overrightarrow{V}$*) che come punti (in tal caso lo indichiamo con* V*) mentre* π *è la seguente applicazione*

$$\pi\colon (u, v) \in V \times V \to \overrightarrow{uv} \triangleq v - u \in \overrightarrow{V}, \tag{8.9}$$

è uno spazio affine.

Dimostrazione. Si tratta di verificare che la terna data rispetta le due proprietà che definiscono gli spazi affini. La (8.1) a pagina 319 ci dice che preso un qualunque vettore $v \in \overrightarrow{V}$ e un qualunque punto $x \in V$ deve esistere un solo $y \in V$ tale che

$$\pi(x, y) = v$$

per come è definita π (vedi la (8.9))

$$\pi(x, y) = y - x$$

quindi deve essere

$$y - x = v \tag{8.10}$$

ed effettivamente esiste ed è unico y tale che vale la (8.10), perché per le proprietà degli spazi vettoriali dalla (8.10) ricaviamo che l'unico y è

$$y = x + v$$

Verifichiamo ora la relazione di Charles: essa ci dice che deve essere

$$\overrightarrow{uv} + \overrightarrow{vw} = \overrightarrow{uv}$$

che equivale in base alla (8.9)

$$(v - u) + (w - v) = w - u \tag{8.11}$$

applicando le proprietà degli spazi vettoriali effettivamente il primo membro della (8.11) viene pari a $w - u$. □

Definizione 8.8. Una terna del tipo di quella definita nella proposizione 8.5 è detta *spazio affine canonicamente associato* (allo spazio vettoriale) V e si indica con $\mathcal{A}(V)$ o semplicemente con V. In particolare se $V = \mathbb{K}^n$ lo spazio affine $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$ canonicamente associato a $\mathbb{K}^n$ è detto *spazio affine standard* n*-dimensionale*.

Definizione 8.9. Sia $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \pi)$ uno spazio affine sul campo $\mathbb{K}$. Fissato un punto $P \in \mathcal{A}$, indichiamo con π_P, l'applicazione che ad ogni vettore libero restituisce il secondo estremo Q del segmento orientato (P, Q) cioè

$$\pi_P \colon \boldsymbol{v} \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \to Q \in \mathcal{A} \tag{8.12}$$

dove Q è un punto tale che $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{v}$. Questa applicazione è ben definita (infatti il punto Q è unico per la (8.1) a pagina 319) ed è addirittura biunivoca. Per ogni punto $P \in \mathcal{A}$ c'è un'applicazione π_P di questo tipo, esse quindi costituiscono una famiglia di applicazioni biunivoche $\{\pi_P\}_{P \in \mathcal{A}}$ e ogni applicazione del tipo π_P prende il nome di *isomorfismo di struttura*. Segnaliamo che il simbolo $\pi_P(\overrightarrow{\mathcal{A}})$ si usa anche scrivere con $(P, \overrightarrow{\mathcal{A}})$ cioè

$$\boxed{(P, \overrightarrow{\mathcal{A}}) \triangleq \pi_P(\overrightarrow{\mathcal{A}})}$$

Notiamo che

$$\boxed{Q \in \pi_P(\overrightarrow{\mathcal{A}}) = (P, \overrightarrow{\mathcal{A}}) \iff \overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}}$$

Osservazione 8.6. Consideriamo uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ sul campo $\mathbb{K}$, un insieme $\boldsymbol{S}$ ed un'applicazione biunivoca T tra $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{S}$. Si può introdurre in $\boldsymbol{S}$ una struttura vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Se indichiamo con u', v' due elementi di $\boldsymbol{S}$ e con u, v due elementi di $\boldsymbol{V}$ la cui immagine tramite T è rispettivamente u' e v' e definiamo la somma di elementi di $\boldsymbol{S}$ e il prodotto di un elemento di $\boldsymbol{S}$ per uno scalare $\alpha \in \mathbb{K}$ in questo modo:

$$\begin{aligned} u' + v' &= T(u + v) \\ \alpha u' &= T(\alpha u) \end{aligned}$$

rispetto a tali operazioni si verifica che $\boldsymbol{S}$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Vedendo $\boldsymbol{S}$ come spazio vettoriale l'applicazione T viene ad essere un isomorfismo (in quanto biunivoca, conserva somma e prodotto, mette in corrispondenza due spazi vettoriali), ecco perché π_P definito nella (8.12) è detto *isomorfismo* di struttura, perché possiamo strutturare $\mathcal{A}$ come spazio vettoriale e in tal modo π_P viene ad essere un isomorfismo.

Osservazione 8.7. Visto l'insieme $\mathcal{A}$ che compare nella (8.12) come spazio vettoriale in modo che π_P sia un isomorfismo, il vettore nullo del codominio è proprio P, perché una trasformazione lineare conserva il vettore nullo ed ovviamente $\pi_P(\overrightarrow{0}) = P$. Quando si pensa $\mathcal{A}$ con questa struttura di spazio vettoriale (mediante l'isomorfismo π_P) lo si indica con $\mathcal{A}_P$ e lo si chiama *spazio tangente in* P. Quindi lo spazio tangente è lo spazio affine visto come spazio vettoriale mediante l'isomorfismo π_P. Ovviamente tutti questi spazi vettoriali sono isomorfi allo spazio dei vettori liberi (perché appunto esiste l'isomorfismo π_P che li mette in corrispondenza), e di conseguenza tutti questi spazi tangenti sono isomorfi tra loro. Ciò ci permette di immaginare lo spazio affine come un insieme tale che ogni punto è dotato di uno spazio di cui il punto stesso è il vettore nullo; è come avere in ogni punto una struttura di spazio vettoriale senza avere alcun punto privilegiato, al contrario di quanto accade negli spazi vettoriali in cui l'elemento privilegiato è il vettore nullo.

8.2 SOTTOSPAZIO AFFINE

Definizione 8.10. Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \pi)$ sul campo $\mathbb{K}$. Sia $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$. Si chiama *giacitura* di $\mathcal{X}$ l'insieme $\overrightarrow{\mathcal{X}}$ dei vettori di $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ tali che gli estremi appartengono ad $\mathcal{X}$. In simboli

$$\overrightarrow{\mathcal{X}} \triangleq \{\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{\mathcal{A}} : P, Q \in \mathcal{X}\}$$

Osservazione 8.8. È possibile restringere opportunamente dominio e codominio dell'applicazione $\pi \colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}$ in modo da ottenere un'applicazione

$$\pi_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}} \colon \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \overrightarrow{\mathcal{X}}$$

che sarà indicata ancora con π.

Esempio 8.1. Se $\mathcal{X}$ è costituito da un solo punto, la sua giacitura è pari al vettore nullo:

$$\mathcal{X} = \{P\} \implies \overrightarrow{\mathcal{X}} = \{\overrightarrow{0}\}$$

infatti $\overrightarrow{\mathcal{X}}$ sarà fatto dal solo vettore $\overrightarrow{PP}$ che per la (8.4) a pagina 321 è pari al vettore nullo.

Esempio 8.2. Se $\mathcal{X}$ è costituito da due soli punti P, Q, la sua giacitura è pari a soli tre vettori, precisamente

$$\mathcal{X} = \{P, Q\} \implies \overrightarrow{\mathcal{X}} = \{\overrightarrow{0}, \overrightarrow{PQ}, -\overrightarrow{PQ}\}$$

infatti i vettori sarebbero $\overrightarrow{PP}$, $\overrightarrow{QQ}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QP}$, ma per la (8.4) a pagina 321 i primi due sono pari a $\overrightarrow{0}$ e per la (8.5) a pagina 321 il quarto è pari a $-\overrightarrow{QP}$.

Definizione 8.11. Dato uno spazio affine $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \pi)$, un sottoinsieme $\mathcal{X}$ di $\mathcal{A}$ sarà detto *sottospazio affine* di $\mathcal{A}$ se

A. La giacitura $\overrightarrow{\mathcal{X}}$ di $\mathcal{X}$ è un sottospazio vettoriale di $\overrightarrow{\mathcal{A}}$.

B. La terna $(\overrightarrow{\mathcal{X}}, \mathcal{X}, \pi)$ è uno spazio affine (dove π indica in realtà la $\pi_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}}$ definita prima).