3 MATRICI

Nella pratica usiamo spesso le tabelle per schematizzare qualcosa, esse sono fatte da righe e colonne all'incrocio dei quali ci sono dei dati. In matematica le tabelle sono più tecnicamente dette *matrici*. Il problema sarà ora formalizzare tale concetto e vedere le proprietà che hanno le matrici numeriche, cioè i cui elementi sono numeri.

Questo capitolo ha poche dimostrazioni e molte definizioni, le dimostrazioni non sono tante e in genere sono anche poco interessanti, vi consiglio di darne solo una lettura soprattutto per quelle che hanno tanti simbolismi. Non ci sarà un paragrafo riassuntivo in quanto tutte le definizioni e gli enunciati vanno imparati, non ci sono sconti.

Teniamo presente, che tante informazioni e definizioni utili sulle matrici si trovano anche nei capitoli successivi (in particolare nei capitoli 4, 6, 7), l'unica definizione utile che non ho inserito nel libro è quella sull'esponenziale di una matrice perché richiede il concetto di serie numeriche che non vedremo nemmeno nel volume 5.

3.1 GENERALITÀ

Definizione 3.1. Si chiama *matrice di ordine* $m \times n$ *(*m *per* n*) a coefficienti* in un certo insieme X una qualunque applicazione A che a una coppia di numeri interi (i, j) con $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$ associa un elemento x dell'insieme X. In simboli

$$A\colon (i,j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \to x \in X$$

Si usa anche scrivere brevemente

$$A = \{\, a_{i,j} \,\}_{\substack{i \in \mathbb{N}_m \\ j \in \mathbb{N}_n}} \tag{3.1}$$

dove $a_{i,j} = A(i,j)$, cioè $a_{i,j}$ è l'elemento di X corrispondente alla coppia (i,j) della funzione A. Spesso per brevità la (3.1) si scrive, più brevemente, come $A = \{\, a_{i,j} \,\}$, qualora sia chiaro dal contesto il tipo di A. Volendo scrivere per esteso tutti gli elementi di una matrice (forma estensiva) si usa la forma tabellare,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

A volte al posto delle parentesi tonde si usano quelle quadre per raccogliere gli elementi.
L'insieme delle matrici $m \times n$ a coefficienti in X si indica con $\mathscr{M}_{m \times n}(X)$ (anziché con $X^{\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n}$).
Per ogni fissato $i \in \mathbb{N}_m$, la n-pla

$$(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}) \in X^n$$

è detta i-esima *riga* di A e si indica anche con $\boldsymbol{a}^i$. Analogamente, per ogni fissato $j \in \mathbb{N}_n$, la m-pla

$$(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{m,j}) \in X^m$$

è detta j-esima *colonna* di A e si indica anche con $\boldsymbol{a}_j$.
Si dice, infine, che a_{ij} è il generico *elemento* di A e che gli interi i, j sono rispettivamente *l'indice di riga* e *l'indice di colonna* di $a_{i,j}$.

Osservazione 3.1. Spesso per brevità ometteremo di indicare la virgola che separa l'indice di riga dall'indice di colonna quindi scriveremo a_{ij} in luogo di $a_{i,j}$. Inoltre segnaliamo che talvolta l'indice di riga si mette come apice e l'indice di colonna come pedice, cioè a_j^i; tale notazione è utile sopratutto quanto si hanno espressioni lunghe che coinvolgono matrici e vettori in quanto permette di semplificare la gestione dei simboli, tuttavia noi non arriveremo a tali livelli quindi di solito non adopereremo tale notazione.

Esempio 3.1. La seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

appartiene a $\mathscr{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, le sue due righe sono le terne

$$\boldsymbol{a}^1 = (2, \sqrt{3}, 0),\ \boldsymbol{a}^2 = (1, -3, 4) \in \mathbb{R}^3$$

mentre le sue tre colonne solo le coppie

$$\boldsymbol{a}_1 = (2, 1),\ \boldsymbol{a}_2 = (\sqrt{3}, -3),\ \boldsymbol{a}_3 = (0, 4) \in \mathbb{R}^2$$

Osservazione 3.2. Ogni matrice $1 \times n$ [$m \times 1$] si indentifica con la n-pla [m-pla] costituita dalla sua unica riga [colonna]. Pertanto l'insieme $\mathscr{M}_{1\times n}(X)$ [$\mathscr{M}_{m\times 1}(X)$] si identifica con X^n [X^m].

Osservazione 3.3. Da ora in poi salvo avviso contrario ci riferiremo alle matrici a coefficienti in un *campo* $\mathbb{K}$, cioè all'insieme $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.[1]

Definizione 3.2. Una matrice $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(X)$ è detta *quadrata di ordine* n se ha un numero di righe pari al numero di colonne cioè $n = m$. L'insieme delle matrici quadrate di ordine n si indica brevemente con $\mathscr{M}_n(X)$, al posto di $\mathscr{M}_{n\times n}(X)$. Se invece $n \neq m$ si dice che A è una *matrice rettangolare*, in particolare se $m > n$ is parla di matrice rettangolare *alta* mentre se $m < n$ si parla di matrice rettangolare *bassa*.

Esempio 3.2. Un esempio di matrice quadrata di ordine 3 è

$$A = \begin{pmatrix} 2.5 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

Mentre un esempio di matrice rettangolare alta di ordine 3×2 è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Una esempio di matrice rettangola bassa di ordine 2×3 è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

1 Ci saranno ovviamente definizioni e considerazioni che valgono anche nel caso che i coefficienti non variano in un insieme che è un campo, sarà, se volete, compito vostro capire quali.

Esempio 3.3. La *matrice nulla* di ordine 3×2 è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione 3.4. A volte per mettere in evidenza che una una matrice A ha m righe ed n colonne si usa scrivere

$$A_{m \times n}$$

mentre nel caso di una matrice quadrata di ordine n si scrive brevemente

$$A_n$$

Osservazione 3.5. Come vedremo le matrici si possono dotare di una struttura di spazio vettoriale, per questo spesso sono indicate col simbolismo del vettore (che nel nostro caso è il grassetto) cioè $\boldsymbol{A}$. Inoltre visto che una matrice si può vedere come una m-pla di n-ple (vedendo cioè ogni riga come una n-pla) o come una n-pla di m-ple (vedendo cioè ogni colonna come una m-pla) che a loro volta hanno struttura vettoriale, possiamo dire in qualche modo che una matrice è "un vettore di vettori" (vettore "bidimensionale") per questo che a volte si usa indicare con un doppio simbolo di vettore cioè $\bar{\bar{A}}$ oppure $\underline{\underline{A}}$.

Nell'ottica di vedere le matrici come vettori di vettori la generica riga è detta, a volte, *vettore riga* e la generica colonna è detta, a volte, *vettore colonna*. Se abbiamo una n-pla di elementi e la vogliamo pensare come caso particolare di una matrice la possiamo vedere come vettore riga (matrice $1 \times n$) o come vettore colonna (matrice $n \times 1$); di solito nelle materie tecniche si conviene, salvo avviso contrario, pensarla come *vettore colonna*.

Definizione 3.3. Data una matrice quadrata di ordine n, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, si chiama *diagonale principale* la n-pla fatta dagli elementi $a_{i,j}$ che hanno uguale indice di riga e colonna $i = j$

$$(a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \dots, a_{n,n})$$

mentre si chiama *diagonale secondaria* la n-pla fatta dagli elementi la cui somma di indici è $n+1$, cioè $i + j = n + 1$, quindi

$$(a_{1,n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n,1})$$

Dalla rappresentazione (3.2) è evidente del perché le n-ple dette prendono il nome di diagonale principale e secondaria.

Definizione 3.4 (Traccia)**.** Data una matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ quadrata di ordine n si chiama *traccia* la somma degli elementi della sua diagonale principale

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Definizione 3.5. Data una generica matrice $A \in \mathscr{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ si chiama matrice *trasposta* di A e si indica con $A^T \in \mathscr{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ la matrice il cui generico elemento $a'_{i,j}$ vale

$$a'_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, j \in \mathbb{N}_m$$

La matrice A^T si ottiene dunque semplicemente considerando come colonne le righe di A e viceversa. Pertanto la trasposta della trasposta ci ridà la matrice di partenza

$$A = \left(A^T\right)^T$$

Esempio 3.4. Data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

la sua trasposta è

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Definizione 3.6. Data una matrice $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ a coefficienti nel campo complesso $\mathbb{C}$, si chiama matrice *coniugata trasposta* di A e si indica con $A^* \in \mathscr{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ la matrice il cui generico elemento $a'_{i,j}$ vale

$$a'_{i,j} = \bar{a}_{j,i} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, j \in \mathbb{N}_m$$

dove $\bar{a}_{j,i}$ è il coniugato di $a_{i,j}$.

Esempio 3.5. Data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+j & 7 & -j \\ 2 & 2-j & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

la sua coniugata trasposta è

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-j & 2 \\ 7 & 2+j \\ j & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Osservazione 3.6. Nel caso di una matrice a coefficienti reali la coniugata trasposta coincide con la trasposta.

Definizione 3.7. Una matrice quadrata $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si dice *triangolare superiore* [*triangolare inferiore*] se ha tutti nulli gli elementi che stanno sotto [sopra] la diagonale principale, cioè

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{per } i > j \ [i < j]$$

Se invece sono nulli tutti gli elementi diversi dalla diagonale principale, la matrice si dice *diagonale*, cioè

$$a_{i,j} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Quindi una matrice diagonale è allo stesso tempo triangolare superiore e inferiore. Una matrice diagonale a volte si indica in questo modo

$$\operatorname{diag}(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n})$$

cioè si scrivono solo gli elementi della diagonale principale (perché tanto si sa che gli altri sono nulli). Un caso particolare è la matrice *identica*, *identità* o *unità* che si indica con I_n o semplicemente con I ed è una matrice diagonale con elementi della diagonale tutti pari a 1 (elemento neutro del prodotto del campo $\mathbb{K}$)

$$I = \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3.6. Le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente triangolare superiore, triangolare inferiore, diagonale.

Definizione 3.8. Si definisce *simbolo di Kronecker* $\delta_{i,j}$ (indicato a volte anche con δ^i_j o con $\delta^{i,j}$) il seguente simbolo

$$\delta_{i,j} \triangleq \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

dove $i \in \mathbb{N}_m$ e $j \in \mathbb{N}_n$.

Osservazione 3.7. Il simbolo di Kronecker è utile ai fini notazionali, infatti per esempio la matrice identica si può brevemente scrivere come

$$I_n = \delta_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Definizione 3.9. Una matrice $A \in \mathscr{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ si dice *nulla* se i suoi coefficienti sono tutti pari all'elemento neutro rispetto alla somma di $\mathbb{K}$.

Definizione 3.10. Una matrice quadrata $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si dice *simmetrica* se coincide con la sua trasposta, cioè

$$A = A^T \Leftrightarrow a_{i,j} = a_{j,i} \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

mentre si dice *antisimmetrica* o *emisimmetrica* se coincide con l'opposto della sua trasposta, cioè

$$A = -A^T \Leftrightarrow a_{i,j} = -a_{j,i} \quad i, j \in \{1, \ldots, n\} \tag{3.3}$$

Nel caso che i coefficienti sono complessi, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la matrice A si definisce *hermitiana* se coincidie con la sua coniugata trasposta

$$A = A^* \Leftrightarrow a_{i,j} = \bar{a}_{j,i} \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Esempio 3.7. Le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ -5 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3+j & j \\ 3-j & 5 & 2 \\ -j & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente simmetrica, emisimmetrica, hermitiana.

Osservazione 3.8. Una matrice antisimmetrica ha necessariamente gli elementi della diagonale principale nulla, infatti per $i = j$ la (3.3) diventa

$$a_{i,i} = -a_{i,i} \Leftrightarrow a_{i,i} = 0$$

Mentre una matrice hermitiana deve necessariamente avere gli elementi della diagonale principale reali, perché solo in tal caso un elemento coincide con il suo coniugato. Inoltre una matrice simmetrica è una particolare matrice hermitiana.

3.2 MATRICI COME SPAZIO VETTORIALE

L'insieme delle matrici si può dotare della struttura di spazio vettoriale a patto di definire opportunamente somma e prodotto per uno scalare.

Definizione 3.11. Date due matrici di stesso ordine $m \times n$

$$A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

si definisce matrice somma di A con B la matrice $C = (c_{i,j})$ ancora di ordine $m \times n$ il cui generico elemento $c_{i,j}$ è somma dei corrispondenti elementi di A e B

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \qquad \forall i \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_n$$

Scritto per esteso:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \dots & a_{n,n} + b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Definizione 3.12. Dato un elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ e un matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ si definisce matrice prodotto di A per α la matrice $\alpha A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ il cui generico elemento è il prodotto di α per il generico elemento di A

$$\alpha a_{i,j} \qquad \forall i \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_n$$

Scritto per esteso:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{1,1} & \dots & \alpha a_{1,n} \\ \alpha a_{2,1} & \dots & \alpha a_{2,n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha a_{n,1} & \dots & \alpha a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Esempio 3.8. Date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcolarne la somma e il prodotto di 4 per A.

Soluzione. Ha senso calcolare la somma perché sono entrambe matrici di stesso ordine (2×3)

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+5 & -1+6 & 0-2 \\ 3-4 & \sqrt{2}+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ -1 & \sqrt{2}+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mentre il prodotto $4A$ vale

$$4A = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 & 4\cdot(-1) & 4\cdot 0 \\ 4\cdot 3 & 4\sqrt{2} & 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 12 & 4\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Osservazione 3.9. L'operazione di somma tra matrici (definizione 3.11) è un'operazione binaria interna su $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$+\colon (A, B) \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to A + B \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

infatti la somma di matrici di ordine $m \times n$ è ancora una matrice di ordine $m \times n$.
Mentre il prodotto per uno scalare (definizione 3.12) è un'operazione binaria esterna su $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ a coefficienti in $\mathbb{K}$

$$\cdot \colon (\alpha, A) \in \mathbb{K} \times \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \alpha A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Proposizione 3.1. *La struttura algebrica* $(\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +)$ *è un gruppo abeliano. Valgono inoltre, per ogni* α, $\beta \in \mathbb{K}$ *e per ogni* $A, B \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *le seguenti proprietà*

A. Proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

B. Proprietà distributiva rispetto alla somma di matrici

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

C. *Una sorta di* proprietà associativa

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta A)$$

D. *L'elemento* 1 *(elemento neutro rispetto al prodotto di* $\mathbb{K}$*) è elemento neutro nel prodotto tra scalare e matrice*

$$1A = A$$

Quindi la quadrupla $(\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \mathbb{K}, +, \cdot)$ *è uno spazio vettoriale sul campo* $\mathbb{K}$.

Dimostrazione. La struttura algebrica $(\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +)$ è un gruppo abeliano infatti la somma di matrici si riconduce alla somma dei corrispondenti elementi sui $\mathbb{K}$ che è un campo (e quindi $(\mathbb{K}, +)$ è un gruppo abeliano)

- Esiste l'elmetto neutro, che è la matrice nulla infatti

$$0 + A = A$$

- Vale la proprietà associativa

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

- Ogni matrice A è dotata di *opposta* $-A$ che è la matrice i cui elementi sono gli opposti di A

$$-A = (-a_{i,j})$$

  per cui

$$A + (-A) = 0$$

- Vale la proprietà commutativa

$$A + B = B + A$$

La dimostrazione delle proprietà A–D è banale e la lascio, se volete, a voi. $\square$

Osservazione 3.10. Il fatto che insieme delle matrici è uno spazio vettoriale si può anche dedurre direttamente dall'osservazione 2.6 a pagina 66 (quindi evitando la proposizione 3.1), infatti in base a tale osservazione sappiamo che se $\boldsymbol{V}$ è uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ anche l'insieme delle applicazioni da I a $\boldsymbol{V}$ (con I insieme qualsiasi) che si indica con $\boldsymbol{V}^I$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Nel nostro caso ponendo $\boldsymbol{V} = \mathbb{K}$ ed $I = \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ $(m, n \geqslant 1)$, abbiamo che l'insieme

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n} \tag{3.4}$$

è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ (infatti anche $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale su se stesso). Ma per definizione l'insieme $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ delle matrici sul campo $\mathbb{K}$ è proprio l'insieme (3.4).

Proposizione 3.2. *Lo spazio vettoriale delle matrici $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ è uno spazio di dimensione finita pari al prodotto nm*

$$\dim \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = nm$$

e una sua base, detta base canonica, naturale *o* standard, *è l'insieme*

$$\{ E_{ij} \} \qquad \forall i \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_n$$

dove E_{ij} è una matrice che ha tutti zero (elemento neutro rispetto alla somma di $\mathbb{K}$) tranne nell'elemento di riga i e colonna j in cui vale 1 (elemento neutro rispetto al prodotto di $\mathbb{K}$); in simboli il generico elemento $e_{h,k}$ di $E_{i,j}$ vale

$$e_{h,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } h = i \text{ e } k = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Ogni matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ è esprimibile come combinazione lineare delle matrici $E_{i,j}$ attraverso i coefficienti $a_{i,j}$ (elementi di A)

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} E_{ij}$$

quindi l'insieme $\{ E_{ij} \mid i \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_n \}$ è un sistema di generatori finito di nm elementi per $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Inoltre è facile vedere (si ragiona analogamente a come visto nel caso della base canonica per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{K}^n$) che tale sistema di generatori è linearmente indipendente e costituisce una base per $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si ha pertanto che

$$\dim \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$$ □

Esempio 3.9. Vediamo ora in un caso particolare le cose dette con la proposizione 3.2. Consideriamo $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ lo spazio vettoriale delle matrice di ordine 2 sul generico campo $\mathbb{K}$. La generica matrice di tale spazio è

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

con a, b, c, d, elementi di $\mathbb{K}$. Per la definizione di somma tra matrici e di prodotto di una matrice per un elemento di $\mathbb{K}$ e relative proprietà possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Quindi l'insieme delle 4 matrici che hanno un solo 1 e tutti 0 è un sistema di generatori di $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ perché una generica matrice si può esprimere come combinazione lineare di tali matrici. Inoltre tali insieme di generatori è linearmente indipendente, infatti la combinazione lineare (attraverso 4 scalari a, b, c, d) di queste 4 matrici come appena visto ci dà una matrice come la (3.5) che è nulla se e solo se

$$a = b = c = d = 0$$

Prendiamo in considerazione sottoinsiemi notevoli dell'insieme delle matrici per vedere quali sono spazi vettoriali. In particolare consideriamo i seguenti sottoinsiemi delle matrici quadrate $\mathscr{M}_n(K)$:

- $D_n(K)$: matrici diagonali sul campo $\mathbb{K}$;
- $T_n^s(\mathbb{K})$: matrici triangolari superiori sul campo $\mathbb{K}$;
- $T_n^i(\mathbb{K})$: matrici triangolari inferiori sul campo $\mathbb{K}$;
- $S_n(\mathbb{K})$: matrici simmetriche sul campo $\mathbb{K}$.
- $AS_n(\mathbb{K})$: matrici antisimmetriche sul campo $\mathbb{K}$.

Proposizione 3.3. *Il sottoinsieme $D_n(\mathbb{K}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ delle matrici diagonali sul campo $\mathbb{K}$ è un sottospazio vettoriale di $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}, +, \cdot)$, e la sua dimensione è n*

$$\dim D_n(\mathbb{K}) = n$$

Dimostrazione. L'insieme $D_n(\mathbb{K})$ è, banalmente, chiuso rispetto all'operazione di somma e prodotto per uno scalare (cioè la somma di due matrici diagonali è ancora diagonale e il prodotto di un elemento di $\mathbb{K}$ per una matrice diagonale è ancora diagonale), quindi per la proposizione 2.2 a pagina 70 è un sottospazio vettoriale. Il fatto che la sua dimensione è n è banale se pensiamo che una matrice diagonale è univocamente individuata dai suoi n elementi della diagonale principale. □

Proposizione 3.4. *Il sottoinsieme $T_n^s(\mathbb{K}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ [$T_n^i(\mathbb{K}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$] delle matrici triangolari superiori [inferiori] sul campo $\mathbb{K}$ è un sottospazio vettoriale di $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}, +, \cdot)$, e la sua dimensione è*

$$\dim T_n^s(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \left[\dim T_n^i(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

Dimostrazione. L'insieme $T_n^s(\mathbb{K})$ [$T_n^i(\mathbb{K})$] è, banalmente, chiuso rispetto all'operazione di somma e prodotto per uno scalare (cioè la somma di due matrici triangolari è ancora triangolare e il prodotto di un elemento di $\mathbb{K}$ per una matrice triangolare è ancora triangolare), quindi per la proposizione 2.2 a pagina 70 è un sottospazio vettoriale. Il fatto che la sua dimensione è $[n(n+1)]/2$ è banale se pensiamo che una matrice triangolare superiore [inferiore] è univocamente individuata dai suoi n elementi della diagonale principale e dagli elementi che stanno sopra [sotto] la diagonale principale che sono

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

infatti detto h il numero di elementi che stanno sopra [sotto] la diagonale principale una matrice di ordine n ha un numero di elementi pari a

$$h + h + n = 2h + n$$

ma d'altra parte una matrice di ordine n ha n^2 elementi quindi deve essere

$$2h + n = n^2 \Leftrightarrow h = \frac{n^2 - n}{2}$$

Dunque gli elementi della diagonale principale più quelli sopra [dotto di essa] sono

$$n + h = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \square$$

Proposizione 3.5. *Il sottoinsieme $S_n(\mathbb{K}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ delle matrici simmetriche sul campo $\mathbb{K}$ è un sottospazio vettoriale di $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}, +, \cdot)$, e la sua dimensione è*

$$\dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione. L'insieme $S_n^s(\mathbb{K})$ è, banalmente, chiuso rispetto all'operazione di somma e prodotto per uno scalare (cioè la somma di due matrici simmetriche è ancora simmetrica e il prodotto di un elemento di $\mathbb{K}$ per una matrice simmetrica è ancora simmetrica), quindi per la proposizione 2.2 a pagina 70 è un sottospazio vettoriale. Il fatto che la sua dimensione è $[n(n+1)]/2$ è banale se pensiamo che una matrice simmetrica è univocamente individuata dai suoi n elementi della diagonale principale e dagli elementi che stanno sopra o sotto la diagonale principale che sono, come visto nella proposizione 3.4

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \square$$

Proposizione 3.6. *Il sottoinsieme $AS_n^s(\mathbb{K}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ delle matrici antisimmetriche sul campo $\mathbb{K}$ è un sottospazio vettoriale di $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}, +, \cdot)$, e la sua dimensione è*

$$\dim AS_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Dimostrazione. L'insieme $AS_n^s(\mathbb{K})$ è, banalmente, chiuso rispetto all'operazione di somma e prodotto per uno scalare (cioè la somma di due matrici antisimmetriche è ancora antisimmetrica e il prodotto di un elemento di $\mathbb{K}$ per una matrice antisimmetrica è ancora antisimmetrica), quindi per la proposizione 2.2 a pagina 70 è un sottospazio vettoriale. Il fatto che la sua dimensione è $[n(n-1)]/2$ è banale se pensiamo che una matrice antisimmetrica è univocamente individuata dai suoi elementi che stanno sopra o sotto la diagonale principale che sono, come visto nella proposizione 3.4

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \square$$

3.3 PRODOTTO NATURALE

In questo paragrafo con $\mathbb{K}^n$ si intenderà lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbb{K}$.

Definizione 3.13. Date 2 n-ple $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ di $\mathbb{K}^n$ si chiama *prodotto naturale*, *scalare canonico* o *scalare standard* l'elemento di $\mathbb{K}$