Ivan Gentile
Matematica per Molti - Volume 4
Copyright© 2018, 1^a edizione

Questo lavoro è stato realizzato con LaTeX.

CONTATTI
`http://www.matematicaxmolti.it` - Sito ufficiale
`info@matematicaxmolti.it` - Email per informazioni

In matematica non si capiscono le cose. Semplicemente ci si abitua ad esse.

— John von Neumann

A chi riesce a pensare diversamente.

INDICE

PREFAZIONE

Matematica per Molti volume 4, com'è facilmente intuibile, è il naturale proseguimento del volume 3 quindi tutte le considerazioni fatte nella prefazione dei volumi precedenti (in particolare del volume 1) valgono pari pari. Il modo migliore per studiare questo libro è farlo dopo aver studiato buona parte del primo.

Questo libro (nonostante numericamente è il penultimo) è l'ultimo della collana ad essere stato completato, perché è quello più complesso e astratto; gli argomenti non sono affrontati nelle scuole superiori (oggi dette secondarie di secondo grado) ma solo nelle Università tecnico scientifiche (Ingegneria, Matematica, Fisica, etc.). Avrebbe dovuto essere il volume 3 delle edizioni precedenti a settembre 2018 (quelle in cui gli attuali volumi 1 e 2 erano unite in un solo volume 1) ma non è mai stato completato quindi toccherà a tutti comprarlo, anche se a onor del vero gli argomenti sono da un punto di vista un po' scollegati da quelli degli altri, quindi si può anche studiare per ultimo; tuttavia il consiglio è di comprarlo perché chi studia Matematica per Molti vuole fare per bene la Matematica e in tale ottica questo volume è fondamentale.

Vengono generalizzati tutti i concetti visti finora: operazioni, insiemi, vettori, sistemi, figure geometriche; questa generalizzazione, che può sembrare un'inutile complicazione, diventa fondamentale quando si affrontano problemi grossi. Il mio consiglio è studiare questo testo prima possibile perché a forza di leggere e rileggere questi concetti vi entreranno nella testa e costituiranno un bagaglio di conoscenze che non solo vi permetterà di capire bene materie tecnico/scientifiche più avanzate ma di impararle molto più rapidamente.

Io ho cercato di semplificarlo e strutturarlo al massimo rispettando però il rigore che serve per rendere questi argomenti strumenti generali, infatti mi ha portato via tantissimo tempo.

Settembre 2018 Ivan Gentile.

RINGRAZIAMENTI

Un doveroso ringraziamento al mio professore di Università di Algebra e Geometria e gli autori dei testi presenti in bibliografia, in particolare ai [1, 2] da cui ho attinto molto per la stesura di questo volume.

Ringrazio anche tutti i lettori che hanno acquistato le edizioni precedenti degli altri volumi, nonostante questo non fosse ancora pronto, e che pazientemente hanno atteso di questo "anello mancante".

Infine, ringrazio, ancora, la comunità di LaTeX sparsa nel mondo che mi ha permesso di scrivere il libro in formato digitale e in particolare il GuIT (Gruppo Utilizzatori Italiani di TeX).

Settembre 2018 I. G.

INTRODUZIONE

Il libro è fatto da 9 capitoli e un'appendice. I primi 6 capitoli trattano dell'*Algebra lineare* perché tutta incentrata sulle trasformazioni e relative operazioni lineari (somma e prodotto). I rimanenti 3 capitoli trattano la *geometria*, in particolare quella *affine* ed *euclidea*, sostanzialmente si definiscono un sistema di assiomi e definizioni per generalizzare la geometria elementare vista nel volume 2.

L'appendice A contiene una serie di esercizi riepilogativi di tutto il libro, sono in pratica prove d'esame universitarie. Il testo non comprende molti esercizi e poi quelli più complessi li ho messi in appendice, in quanto gli argomenti di questo volume sono interessanti quando li si vede come un modo per generalizzare le tante cose che si sanno (operazioni tra insiemi, vettori, geometria, sistemi di equazioni, . . .) quindi, ritengo, che sia più interessante la teoria che gli esercizi; questi si faranno in casi concreti quando i concetti saranno applicati alle specifiche materie (teoria dei sistemi, meccanica, etc.).

Mi tocca segnalare che nonostante il testo sia abbastanza voluminoso ci sono argomenti di geometria che hanno una loro importanza che non sono affrontati in questo volume come orientazione, semispazi, simplessi, simmetrie eccetera, senza contare altri tipi di geometria (come quella proiettiva, quella iperbolica, eccetera). I motivi sono dovuti allo spazio a disposizione ma anche al fatto che si va in argomenti sempre più specialistici di cui non sono sufficientemente competente; inoltre, comunque, gli argomenti di interesse non trattati spesso vengono ripresi, anche se in modo meno generale, in corsi specifici (come per esempio le definizioni di coseni direttori, di prodotto vettoriale, etc.) in modo più che sufficiente alla stragrande maggioranza dei casi.

Nel testo si adottano diverse convenzioni che è utile specificare:

- Teoremi di dimostrazione non molto lunga, li ho indicati semplicemente come "proposizioni".
- Le parentesi quadre nel testo indicano delle parole lette in alternativa a quelle immediatamente precedenti; ad esempio, scrivendo

  > L'unione [intersezione] di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.

  si intende che valgono entrambe le seguenti affermazioni
  - *L'unione* di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.
  - *L'intersezione* di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.

  In pratica è un modo per abbreviare le cose.
- Le soluzioni degli esercizi (laddove presenti) sono indicate tra parentesi quadre sul margine destro o sul margine sinistro in una riga in cui è presente solo la soluzione. Se volete indicazioni o soluzioni degli esercizi (mi rivolgo sopratutto ai docenti) contattatemi all'indirizzo `info@matematicaxmolti.it`.

Di seguito trovate, per comodità, anche la riproposizione delle tabelle, viste nei volumi precedenti, con le lettere greche e i simboli matematici. Inoltre è stata aggiunta una tabella per i tanti simboli e operatori che introdurremo in questo volume.

Buona matematica!

Lettere Greche.

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
α	alpha	ν	ni
β	beta	ξ	xi (minuscolo)
γ	gamma (minuscola)	Ξ	xi (maiuscolo)
Γ	gamma (maiuscola)	π	pi (greco minuscolo)
δ	delta (minuscola)	Φ	pi (greco maiuscolo)
Δ	delta (maiuscola)	ρ	rò
ε	epsilon	σ	sigma
ζ	zita	Σ	Sigma (maiuscolo)
η	eta	τ	tau
ϑ	theta (minuscola)	φ	phi (minuscolo)
Θ	theta (maiuscola)	Φ	phi (maiuscolo)
ι	iota	ψ	psi (minuscolo)
κ	kappa	Ψ	psi (maiuscolo)
λ	lambda (minuscola)	ω	omega (minuscolo)
Λ	lambda (maiuscola)	Ω	omega (maiuscolo)
μ	mu		

Simboli Matematici.

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$+$	somma	$-$	sottrazione
$\cdot$	prodotto	$\times$	prodotto
$/$	divisione	$\div$	divisione
$\sum$	sommatoria	$\prod$	produttoria
$\sqrt{}$	radice quadrata	$\sqrt[n]{}$	radice n-esima
$=$	uguale	$\simeq$	circa uguale
$\triangleq$	uguale per definizione	$\stackrel{\triangle}{\iff}$	equivale per definizione
$<$	minore	$\leqslant$	minore o uguale
$>$	maggiore	$\leqslant$	maggiore o uguale
$\ll$	molto minore	$\gg$	molto maggiore
$\vert$	tale che	$:$	tale che, divisione
$\equiv$	equivale	$\in$	appartiene
$\emptyset$	insieme vuoto	∞	infinito
$\exists$	esiste	$!\exists$	esiste ed è unico
$\cup$	unione	$\cap$	intersezione
$\setminus$	differenza (tra insiemi)	$\complement$	complemento
$\subset$	incluso	$\supset$	include
$\subseteq$	incluso non strettamente	$\supseteq$	include non strettamente
$\mathbb{N}$	insieme dei naturali	$\mathbb{Z}$	insieme degli interi
$\mathbb{P}$	numeri pari	$\mathbb{D}$	numeri dispari
$\mathbb{Q}$	numeri razionali	$\mathbb{R}$	numeri reali
$\overline{\mathbb{R}}$	insieme ampliato dei numeri reali		
$\mathbb{C}$	numeri complessi	$\mathbb{I}$	numeri immaginari
$\widehat{AB}$	arco tra A e B	$\widehat{ab}$	angolo tra a e b
$\longleftrightarrow$	implicazione materiale	$\longleftrightarrow$	coimplicazione materiale
$\implies$	implica	$\Rightarrow$	implica
$\iff$	equivale, se e solo se	$\Leftrightarrow$	equivale, se e solo se
$\forall$	per ogni, qualunque	$\neg$	negazione
$\vee$	disgiunzione, or	$\wedge$	congiunzione, and
Re	parte reale	Im	parte immaginaria
$\vert x\vert$	valore assoluto di x	$\vert\boldsymbol{v}\vert$	modulo del vettore $\boldsymbol{v}$
$\overline{AB}$	misura del segmento AB		
$\cong$	congruente	$\doteq$	superfici equivalenti

Simboli di Insiemi o operatori.

Simbolo	Nome
$\mathrm{Re}(z)$	Parte reale del numero complesso z
$\mathrm{Im}(z)$	Coefficiente dell'immaginaria del numero complesso z
$\bar{z}$, z^*	Coniugato del numero complesso z
$\arg z$, $\angle z$	argomento o fase del numero complesso z
$\mathrm{Arg}\, z$	argomento principale del numero complesso z
$[\rho, \vartheta]$	forma trigonometrica di un numero complesso
Id	Funzione identica
$\boldsymbol{L}(X)$, $\mathrm{Span}(X)$	chiusura lineare o spazio generato da X
$\dim \boldsymbol{V}$	dimensione dello spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$
$\tilde{B}$	base canonica o naturale di $\mathbb{K}^n$
$\boldsymbol{W}_1 \oplus \boldsymbol{W}_2$	somma diretta degli spazi vettoriali $\boldsymbol{W}_1$ e $\boldsymbol{W}_2$
$\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$	insieme delle matrici di ordine $m \times n$ sul campo $\mathbb{K}$
A^T	trasposta della matrice A
A^*	coniugata trasposta della matrice A
$\mathrm{diag}(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n})$	matrice diagonale con diagonale principale $a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}$
δ_{ij}	simbolo di Kronecker
$D_n(\mathbb{K})$	insieme delle matrici diagonali sul campo $\mathbb{K}$
$T^s_n(\mathbb{K})$	insieme delle matrici triangolari superiori sul campo $\mathbb{K}$
$T^i_n(\mathbb{K})$	insieme delle matrici triangolari inferiori sul campo $\mathbb{K}$
$AS_n(\mathbb{K})$	insieme delle matrici antisimmetriche sul campo $\mathbb{K}$
$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$	prodotto scalare, naturale o canonico tra n-ple
$GL_n(\mathbb{K})$	gruppo delle matrici regolari di ordine n sul campo $\mathbb{K}$
$\det A$, $\|A\|$, $\det T$	determinante della matrice A [dell'endomorfismo T]
$A(i_1, \ldots, i_h; j_1, \ldots, j_k)$	matrice estratta dalla matrice A
M_{ij}, M^i_j	minore complementare dell'elemento a_{ij}
A^i_j, A_{ij}	complemento algebrico di a_{ij}
$\mathrm{agg}\, A$, $\mathrm{Agg}\, A$	aggiunta della matrice A
$\rho(A)$, $[\rho(T)]$	rango della matrice A [della trasformazione lineare T]
$\Theta_n(\mathbb{K})$	gruppo delle matrici ortogonali di ordine n sul campo $\mathbb{K}$
$\mathrm{Im}\, T$, $\mathcal{R}(T)$ $[\mathcal{R}(A)]$	spazio immagine, campo o range della trasformazione lineare T [della matrice A]
$\mathrm{Ker}\, T$, $\mathcal{N}(T)$ $[\mathrm{Ker}\, A$, $\mathcal{N}(A)]$	nucleo della trasformazione lineare T [della matrice A]
$L(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$	insieme delle trasformazioni lineari di $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{W}$
$\mathrm{End}(\boldsymbol{V})$	insieme degli endomorfismi su $\boldsymbol{V}$
$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{V})$	insieme degli automorfismo su $\boldsymbol{V}$
$M_{B,B'}(T)$	matrice associata a T rispetto alle basi B e B'
$M_B(T)$	matrice associata all'endomorfismo T rispetto alla base B
$\mathrm{Sol}\, S$	spazio delle soluzioni del sistema lineare S
$p_A(\lambda)$	polinomio caratteristico dalla matrice o della trasformazione A
$\mathrm{mg}(\lambda)$, $\mathrm{ma}(\lambda)$	Molteplicità geometrica [algebrica] dell'autovalore λ
$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$	prodotto scalare tra i vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$
$\\|\boldsymbol{v}\\|$ $[\\|A\\|]$	norma del vettore $\boldsymbol{v}$ [della matrice A]
$d(x, y)$	distanza tra i punti x, y
$X^\perp$	complemento ortogonale dell'insieme X
$\boldsymbol{W}^{c\perp}$	complemento ortogonale nel congiungente
$\mathrm{Ort}(\boldsymbol{V})$	insieme di tutti gli isomorfismi ortogonali di $\boldsymbol{V}$ in se
Σ	insieme dei punti della geometria elementare
$\overrightarrow{\Sigma}$	Insieme dei vettori liberi dello spazio della geometria elementare
$\pi(P, Q)$	applicazione che a una coppia di punti associa il vettore libero $\overrightarrow{PQ}$
$\pi_P(\overrightarrow{v})$	isomorfismo di struttura
$\mathcal{A}_P$	spazio tangente in P
$[X]$	spazio (affine) generato
$C(X, Y)$	spazio (affine) congiungente
$\mathrm{Aff}(A)$	gruppo delle affinità di A
$F(A_{n_2})$	fascio di iperpiani di base A_{n-2}
$\mathcal{E}_n$	spazio euclideo di dimensione n
$\mathcal{U}(\mathcal{E}_n)$	gruppo delle affinità di $\mathcal{E}_n$