

Ivan Gentile  
*Matematica per Molti - Volume 3*  
Copyright© 2018, 1<sup>a</sup> edizione

#### COLOPHON

Nessuna parte di questa pubblicazione può essere, tradotta, riprodotta o trasmessa senza l'autorizzazione dell'autore. Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% del volume. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale possono avvenire, per un numero di pagine non superiori al 15% del volume, solo a seguito di specifica autorizzazione dell'autore.

Questo lavoro è stato realizzato con  $\text{\LaTeX}$ .

I nomi commerciali, i loghi e i marchi registrati menzionati nel testo appartengono ai rispettivi proprietari.

Nel frontespizio è riprodotto il logo di *Matematica per Molti* di proprietà di Ivan Gentile.

#### CONTATTI

<http://www.matematicaxmolti.it> - Sito ufficiale  
[info@matematicaxmolti.it](mailto:info@matematicaxmolti.it) - Email per informazioni

I. Gentile<sup>©</sup>

Non preoccuparti delle difficoltà che incontri in matematica, ti posso assicurare che le mie sono ancora più grosse.

— Albert Einstein

A chi non pensa che sia tutto lo stesso.

L. Gentile<sup>©</sup>

I. Gentile<sup>©</sup>

# INDICE

PREFAZIONE ix

INTRODUZIONE xiii

1	INSIEMI NUMERICI	1
1.1	Intervalli numerici	1
1.2	Insiemi numerici	2
1.2.1	Insiemi numerici limitati	3
1.2.2	Massimo e minimo di un insieme numerico	4
1.2.3	Estremo superiore e inferiore	6
1.3	Insiemi numerici separati e contigui	9
1.4	Completezza del campo reale	10
1.5	Potenze a esponente reale	12
1.5.1	Problematica	12
1.5.2	Approssimazione di una potenza a esponente irrazionale	13
1.5.3	Definizione di potenza a esponente irrazionale	13
1.5.4	Proprietà delle potenze a esponente reale	14
1.6	Riassunto	14
1.6.1	Intervalli	14
1.6.2	Massimo, minimo, estremo inferiore e superiore	15
1.6.3	Potenza a esponente reale	16
2	RELAZIONI E FUNZIONI	17
2.1	Relazioni	17
2.1.1	Rappresentazioni	18
2.2	Funzioni	20
2.2.1	Rappresentazione geometrica	23
2.3	Successioni	23
2.4	Famiglie di insiemi	24
2.4.1	Altre notazioni	26
2.5	Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche	26
2.6	Restrizione e prolungamento	28
2.7	Relazioni tra insiemi immagini	29
2.8	Funzioni composte	31
2.8.1	Legami tra composta e componenti	34
2.9	Funzioni invertibili	37
2.10	Relazioni di equivalenza	39
2.10.1	Ricoprimento e partizione	41
2.10.2	Classe di equivalenza e insieme quoziente	41
2.11	Relazione d'ordine	44
2.12	Principio di induzione	45
2.13	Cardinalità di un insieme	47
2.14	Insiemi numerabili	47
2.15	Riassunto	48
3	FUNZIONI NUMERICHE	53
3.1	Funzioni numeriche e analitiche	53
3.2	Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}^2$	54
3.3	Rappresentazione geometrica	56
3.3.1	Diagramma cartesiano	57
3.4	Geometria analitica	58

3.5	Trasformazioni geometriche	60
3.5.1	Simmetria rispetto all'asse $x$	60
3.5.2	Simmetria rispetto all'asse $y$	61
3.5.3	Simmetria rispetto alla bisettrici dei quadranti	61
3.6	Restrizione e prolungamento	63
3.7	Funzioni invertibili	63
3.8	Esempi di particolari funzioni	64
3.8.1	La funzione costante	64
3.8.2	Funzione identica	65
3.8.3	Funzioni di proporzionalità	65
3.8.4	La funzione valore assoluto	66
3.8.5	La funzione gradino	66
3.8.6	La funzione signum o segno	67
3.8.7	La funzione parte intera	67
3.8.8	La funzione di Dirichelet	67
3.8.9	La funzione caratteristica di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$	68
3.9	Funzioni positive, negative. Zeri e valore assoluto di una funzione.	68
3.10	Funzioni pari, dispari, periodiche	69
3.11	Funzioni monotone	71
3.12	Funzioni limitate. Minimo, massimo ed estremi di una funzione	73
3.13	Operazioni razionali sulle funzioni	75
3.14	Criteri di Monotonia	76
3.14.1	Opposta e reciproca	76
3.14.2	Somma	77
3.14.3	Prodotto	78
3.14.4	Funzioni invertibili	79
3.14.5	Funzioni composte	80
3.15	Riassunto	81
4	GEOMETRIA ANALITICA	85
4.1	Introduzione	85
4.2	Retta	85
4.2.1	Rette parallele agli assi	86
4.2.2	Retta passante per l'origine	87
4.2.3	Retta in posizione generica	89
4.2.4	Rette parallele e perpendicolari	90
4.2.5	Fascio improprio o proprio di rette	92
4.2.6	Determinazione di una retta dati i parametri	93
4.3	Circonferenza	97
4.3.1	Circonferenza per tre punti	100
4.4	Parabola	101
4.4.1	Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse $y$	101
4.4.2	Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse $x$	103
4.4.3	Condizioni per determinare una parabola	104
4.5	Ellisse	107
4.6	Iperbole	115
4.6.1	Iperbole equilatera	119
5	STUDIO DI FUNZIONI NOTEVOLI	125
5.1	La funzione potenza	125
5.1.1	Esponente intero non negativo	125
5.1.2	Esponente intero negativo	126
5.1.3	Esponente reale	127

5.2	Funzione radice	129
5.3	Funzione esponenziale	131
5.4	Equazione esponenziale	133
5.5	Logaritmi	134
5.5.1	Logaritmi decimali e naturali	136
5.6	Funzione logaritmica	136
5.7	Proprietà dei logaritmi	137
5.7.1	Altre proprietà dei logaritmi	140
6	APPLICAZIONI DI GEOMETRIA ANALITICA	143
6.1	Disequazioni della funzione potenza	143
6.1.1	Esponente intero positivo	144
6.1.2	Esponente intero negativo	146
6.1.3	Esponente razionale	148
6.1.4	Esponente irrazionale	151
6.2	Disequazioni della funzione radice	153
6.3	Equazioni esponenziali	155
6.4	Equazioni logaritmiche	162
6.5	Disequazioni esponenziali e logaritmiche	165
6.6	Determinazione del dominio di una funzione	173
7	GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA	177
7.1	Funzioni goniometriche	177
7.1.1	Definizione originaria	177
7.1.2	Definizione nella circonferenza goniometrica	179
7.2	Relazioni tra funzioni trigonometriche	187
7.3	Funzioni goniometriche inverse	190
7.3.1	Arcoseno	190
7.3.2	Arcocoseno	191
7.3.3	Arcotangente	192
7.3.4	Arcocotangente	193
7.4	Da una funzione goniometrica a un'altra	193
7.5	Archi associati	195
7.5.1	Archi supplementari	195
7.5.2	Archi che differiscono di $\pi$	196
7.5.3	Archi esplementari	197
7.5.4	Archi opposti	197
7.5.5	Archi complementari	198
7.5.6	Archi che differiscono di $\pi/2$	199
7.5.7	Archi che differiscono di $3\pi/2$	199
7.6	Formule goniometriche	201
7.7	Altre identità trigonometriche	208
7.8	Equazioni goniometriche	212
7.8.1	Equazioni elementari	212
7.8.2	Equazioni di uguaglianza	214
7.8.3	Equazioni riducibili a quelle elementari	216
7.8.4	Altri tipi di equazioni	223
7.9	Disequazioni goniometriche	223
7.10	Funzioni iperboliche	225
7.10.1	Seno iperbolico	225
7.10.2	Settore seno iperbolico	226
7.10.3	Coseno iperbolico	227
7.10.4	Settore coseno iperbolico	229
7.10.5	Tangente iperbolica	229
7.10.6	Settore tangente iperbolica	231

7.11	Relazioni in un triangolo rettangolo	231
7.11.1	Risoluzione del triangolo	232
7.12	Teoremi sui triangoli	235
A	CALCOLO COMBINATORIO	241
A.1	Disposizioni	242
A.2	Permutazioni	245
A.3	Combinazioni	248
A.3.1	Sviluppo della potenza di un binomio	251
A.4	Doppio Fattoriale	252
B	STATISTICA E STOCASTICA	253
B.1	Indagine statistica	254
B.2	Rappresentazione dei dati	254
B.2.1	Tabelle	254
B.2.2	Diagrammi	256
B.3	Elaborazione dei dati	257
B.3.1	Indici di posizione	258
B.3.2	Indici di dispersione	269
B.4	Teoria della probabilità	271
B.5	Approcci alla probabilità	273
B.5.1	Definizione classica	273
B.5.2	Definizione frequentista	274
B.5.3	Teoria assiomatica	275
B.6	Costruzione dello spazio campione e del $\sigma$ -campo	280
B.7	Probabilità condizionata	285
B.8	Indipendenza statistica	300
B.8.1	Indipendenza di tre o più eventi	304
B.8.2	Indipendenza condizionale	304
B.9	Esempi notevoli	308
B.10	Esperimenti combinati	319
B.10.1	Prove ripetute	320
	BIBLIOGRAFIA	323
	INDICE ANALITICO	325

## PREFAZIONE

*Matematica per Molti volume 3*, com'è facilmente intuibile, è il naturale proseguimento del volume 2 quindi tutte le considerazioni fatte nella prefazione dei volumi 1 e 2 valgono pari pari. Il modo migliore per studiare questo libro è farlo dopo aver studiato buona parte dei primi due.

Questo libro è un po' più complesso dei due volumi precedenti. Sugli argomenti trattati in questo testo si potrebbe scrivere tantissimo e immaginare un'infinità di esercizi di tipo diverso. Ho preferito non essere esaustivo, soprattutto per la parte di geometria analitica, ma concentrarmi sugli aspetti più importanti (che sono comunque tanti), perché non bisogna mai dimenticare che la matematica, e in particolare gli argomenti di tale volume, è principalmente uno *strumento* per risolvere problemi di scienza e tecnologia; a tal proposito, ritengo, in base alla mia esperienza, che in questo volume gli strumenti ci siano tutti; se poi dovesse capitare qualche aspetto di interesse non presente nel libro non sarà difficile per il lettore impararlo.

Dando un occhio all'indice vi può stupire la mancanza dei numeri complessi (di cui abbiamo fatto solo un breve cenno nel volume 1), il motivo è che ho preferito fare una trattazione esaustiva nel volume 4 nell'ambito delle strutture algebriche.

Questo libro nella vecchia struttura della collana di *Matematica per Molti* era detto "volume 2"; questa nuova edizione non aggiunge quasi nulla se non piccole correzioni quindi chi ha la vecchia edizione nota come "volume 2" può tranquillamente non acquistare questa.

Settembre 2018

Ivan Gentile.

I. Gentile<sup>©</sup>

## RINGRAZIAMENTI

Anche per i ringraziamenti mi tocca ripetermi, quindi ringrazio la mia professoressa di Analisi Matematica dell'Università, gli autori dei testi presenti in bibliografia, in particolare ai [1, 2] da cui ho attinto molto per la stesura di questo volume. Infine, ringrazio, ancora, la comunità di  $\text{\LaTeX}$  sparsa nel mondo che mi ha permesso di scrivere il libro in formato digitale e in particolare il  $\text{\gI\T}$  (Gruppo Utilizzatori Italiani di  $\text{\TeX}$ ).

*Settembre 2018*

I. G.

I. Gentile<sup>©</sup>

I. Gentile<sup>©</sup>

## INTRODUZIONE

Il libro è fatto da 7 capitoli e due appendici. Sono, inizialmente, presentate definizioni e proprietà degli insiemi numerici, delle relazioni e delle funzioni. Poi ci si concentra sulle funzioni numeriche, presentando anche nuovi tipi di equazioni. Un capitolo è dedicato alla geometria analitica, in cui introducendo particolari curve, si vede come è possibile risolvere problemi geometrici con l'algebra. Infine è presentata la trigonometria, argomento veramente fondamentale.

Le appendici trattano il calcolo combinatorio, la statistica e la stocastica, argomenti tutti molto interessanti; tuttavia, ho preferito metterli come appendici perché di solito fanno parte di corsi di statistica piuttosto che di matematica. Vi consiglio in ogni caso di studiarli perché trovano molte applicazioni anche nella vita di tutti i giorni e perché probabilmente vi serviranno per il seguito degli studi.

Nel testo si adottano diverse convenzioni che è utile specificare:

- Teoremi di dimostrazione non molto lunga, li ho indicati semplicemente come "proposizioni".
- Le parentesi quadre nel testo indicano delle parole lette in alternativa a quelle immediatamente precedenti; ad esempio, scrivendo

L'unione [intersezione] di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.

si intende che valgono entrambe le seguenti affermazioni

- L'unione di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.
- L'intersezione di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.

In pratica è un modo per abbreviare le cose.

- Le soluzioni degli esercizi (laddove presenti) sono indicate tra parentesi quadre sul margine destro o sul margine sinistro in una riga in cui è presente solo la soluzione. Se volete indicazioni o soluzioni degli esercizi (mi rivolgo soprattutto ai docenti) contattatemi all'indirizzo [info@matematicaxmolti.it](mailto:info@matematicaxmolti.it).

Di seguito trovate, per comodità, anche la riproposizione delle tabelle, viste nel volume 1, con le lettere greche e i simboli matematici. Per quest'ultimi sono stati aggiunti solo alcuni simboli non presenti nel volume 1 che sono  $\trianglelefteq$  e  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Buona matematica!

### Lettere Greche.

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$\alpha$	alpha	$\nu$	ni
$\beta$	beta	$\xi$	xi (minuscolo)
$\gamma$	gamma (minuscola)	$\Xi$	xi (maiuscolo)
$\Gamma$	gamma (maiuscola)	$\pi$	pi (greco minuscolo)
$\delta$	delta (minuscola)	$\Phi$	pi (greco maiuscolo)
$\Delta$	delta (maiuscola)	$\rho$	rò
$\varepsilon$	epsilon	$\sigma$	sigma
$\zeta$	zita	$\Sigma$	Sigma (maiuscolo)
$\eta$	eta	$\tau$	tau
$\theta$	theta (minuscola)	$\varphi$	phi (minuscolo)
$\Theta$	theta (maiuscola)	$\Phi$	phi (maiuscolo)
$\iota$	iota	$\psi$	psi (minuscolo)
$\kappa$	kappa	$\Psi$	psi (maiuscolo)
$\lambda$	lambda (minuscola)	$\omega$	omega (minuscolo)
$\Lambda$	lambda (maiuscola)	$\Omega$	omega (maiuscolo)
$\mu$	mu		

### Simboli Matematici.

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$+$	somma	$-$	sottrazione
$\cdot$	prodotto	$\times$	prodotto
$/$	divisione	$\div$	divisione
$\Sigma$	sommatoria	$\prod$	produttoria
$\sqrt{\quad}$	radice quadrata	$\sqrt[n]{\quad}$	radice n-esima
$=$	uguale	$\approx$	circa uguale
$\triangleq$	uguale per definizione	$\trianglelefteq$	equivale per definizione
$<$	minore	$\leq$	minore o uguale
$>$	maggiore	$\geq$	maggiore o uguale
$\ll$	molto minore	$\gg$	molto maggiore
$ $	tale che	$:$	tale che, divisione
$\equiv$	equivale	$\in$	appartiene
$\emptyset$	insieme vuoto	$\infty$	infinito
$\exists$	esiste	$!\exists$	esiste ed è unico
$\cup$	unione	$\cap$	intersezione
$\setminus$	differenza (tra insiemi)	$\complement$	complemento
$\subset$	incluso	$\supset$	include
$\subsetneq$	incluso non strettamente	$\supsetneq$	include non strettamente
$\mathbb{N}$	insieme dei naturali	$\mathbb{Z}$	insieme degli interi
$\mathbb{P}$	numeri pari	$\mathbb{D}$	numeri dispari
$\mathbb{Q}$	numeri razionali	$\mathbb{R}$	numeri reali
$\overline{\mathbb{R}}$	insieme ampliato dei numeri reali	$\mathbb{I}$	numeri immaginari
$\mathbb{C}$	numeri complessi	$\widehat{ab}$	angolo tra a e b
$\overline{AB}$	arco tra A e B	$\longleftrightarrow$	coimplicazione materiale
$\longleftrightarrow$	implicazione materiale	$\Rightarrow$	implica
$\Rightarrow$	implica	$\Leftrightarrow$	equivale, se e solo se
$\Leftrightarrow$	equivale, se e solo se	$\neg$	negazione
$\forall$	per ogni, qualunque	$\wedge$	congiunzione, and
$\vee$	disgiunzione, or	$\text{Im}$	parte immaginaria
$\text{Re}$	parte reale	$ v $	modulo del vettore v
$ x $	valore assoluto di x		
$\overline{AB}$	misura del segmento AB	$\doteq$	superfici equivalenti
$\cong$	congruente		