5 STUDIO DI FUNZIONI NOTEVOLI

In questo capitolo vedremo delle funzioni numeriche molto importanti in matematica e ne studieremo l'andamento, le proprietà e il diagramma; uno studio più sistematico su qualsiasi funzione lo vedremo nel volume 5. Introdurremo anche alcuni tipi di equazioni, le equazioni esponenziali e logaritmiche, che si vanno ad aggiungere a quelle viste nel volume 1, ma della cui risoluzione ne parleremo nel capitolo 6.

5.1 LA FUNZIONE POTENZA

5.1.1 Esponente intero non negativo

La *funzione potenza di esponente zero*:

$$f(x) = x^0$$

è definita per $x \neq 0$ dall'uguaglianza $x^0 = 1$, e si prolunga nel punto $x = 0$ col porre, come è naturale, $f(0) = 1$. Dunque la potenza di esponente zero si identifica con la funzione costante in $\mathbb{R}$ uguale a 1.

La potenza di esponente *positivo* $n \in \mathbb{N}$ è la funzione

$$f(x) = x^n$$

definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per $n = 1$ la potenza si riduce alla funzione identica, già esaminata nel paragrafo 3.8.2 a pagina 65; supponiamo quindi $n > 1$.

Si ha $f(0) = 0$ ed inoltre

- se n è pari la funzione è sempre positiva (tranne per $x = 0$ in cui come detto è nulla);
- se n è dispari la funzione è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$.

Nell'intervallo $[0, +\infty[$ la funzione è strettamente crescente ed assume qualunque valore positivo.

Siccome

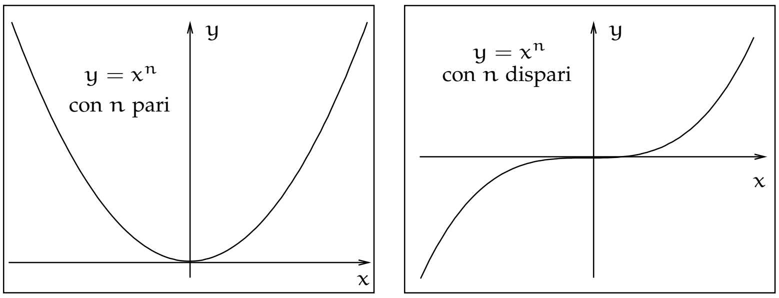
$$(-x)^n = x^n \quad \text{per } n \text{ pari}, \qquad (-x)^n = -x^n \quad \text{per } n \text{ dispari}$$

allora

- se n è pari la funzione è pari, ed essendo strettamente crescente in $[0, +\infty[$ è strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$, ed ha per codominio $[0, +\infty[$;
- se n è pari la funzione è dispari, ed essendo strettamente crescente in $[0, +\infty[$ è strettamente crescente anche in $]-\infty, 0]$ (quindi strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$), ed ha per codominio $\mathbb{R}$;

Se n è dispari la funzione è invertibile, e dall'equazione

$$x^n = y$$



(a) Esponente pari. **(b)** Esponente dispari.

Figura 5.1: Funzione potenza di esponente intero non negativo e maggiore di 1.

si deduce che l'inversa è la funzione radice n-esima di y

$$x = \sqrt[n]{y}$$

definita in $\mathbb{R}$. Se n è pari, la funzione non è invertibile (perché la funzione è pari e quindi assume gli stessi valori di y per valori di x simmetrici rispetto all'asse delle ascisse), ma è localmente invertibile in $]-\infty, 0]$ e in $[0, +\infty[$; le rispettive inverse locali sono

$$x = -\sqrt[n]{y}, \qquad x = \sqrt[n]{y},$$

entrambe definite nell'intervallo $[0, +\infty[$.

In base anche a quanto detto abbiamo che il diagramma dell funzione potenza $y = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$ è illustrato in figura 5.1, in cui si nota che n è pari l'asse y è asse di simmetria per il diagramma mentre per n dispari il diagramma ha l'origine come centro di simmetria

5.1.2 Esponente intero negativo

La *funzione potenza a esponente intero negativo* è

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}$$

ed è definita per $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

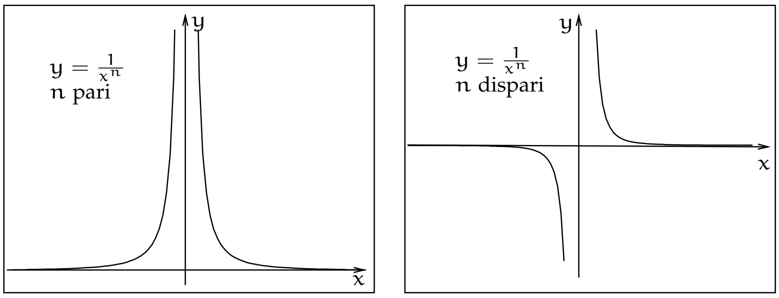
La funzione

- Per n pari è pari e positiva, è strettamente crescente in $]-\infty, 0[$ (per la (3.17) di pagina 77) e strettamente decrescente in $]0, +\infty[$ (per la (3.16) di pagina 77). In ciascuno di tali intervalli la funzione assume qualunque valore reale positivo, pertanto il suo codominio è $]0, +\infty[$.

- Per n dispari è dispari, è positiva in $]0, +\infty[$ e negativa in $]-\infty, 0[$; è strettamente decrescente sia $]-\infty, 0[$ che in $]0, +\infty[$ (per la (3.16) di pagina 77), ma non in tutto il suo insieme di definizione perché per $x' < 0 < x''$ si ha $f(x') < f(x'')$. In $]0, +\infty[$ assume qualunque valore reale positivo, in $]-\infty, 0[$ assume qualunque valore reale negativo; pertanto il suo codominio è $\mathbb{R} - \{0\}$

Inoltre

- Se n è dispari la funzione è invertibile;



(a) Esponente pari. **(b)** Esponente dispari.

Figura 5.2: Funzione potenza di esponente intero negativo.

- Se n è pari non è invertible ma è localmente invertibile in $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$.

L'andamento del diagramma è illustrato in figura 5.2. Per $n = 1$ il diagramma prende il nome di *iperbole equilatera*.

5.1.3 Esponente reale

Detto α un numero reale, si chiama *funzione potenza di esponente reale* α la funzione

$$f(x) = x^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Per α intero la funzione è stata studiata nei numeri precedenti (paragrafi 5.1.1, 5.1.2), occorre quindi considerare il caso che α non sia un numero intero.

La funzione è allora definita in $[0, +\infty[$ se α è positivo, in $]0, +\infty[$ se α è negativo (ricordiamo che la funzione potenza con esponente reale non è definita per valori negativi della base per evitare ambiguità come visto nel volume 1).

Se α è un numero razionale, $\alpha = m/n$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, si ha

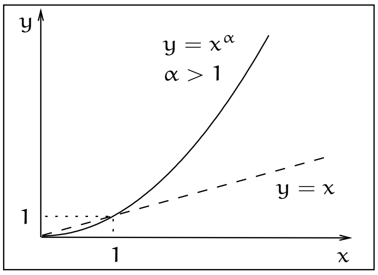
$$x^\alpha = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad \forall x > 0 \ (\forall x \geqslant 0 \text{ se } \alpha > 0) \tag{5.1}$$

Esaminiamo in primo luogo il caso $\alpha > 0$, ed osserviamo che la funzione è strettamente crescente. Infatti

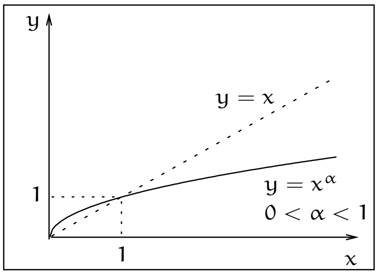
- Se $\alpha = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$), la stretta crescenza di x^α è conseguenza del fatto che $x^{1/n}$ è l'inversa locale in $[0, +\infty[$ della funzione potenza di esponente intero positivo Infatti la potenza di esponente intero positivo è x^n e in $[0, +\infty[$ la sua inversa è $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. Essendo x^n strettamente crescente in $[0, +\infty[$ lo è anche la sua inversa e cioè $x^{1/n}$ (teorema 3.6 a pagina 79).

- Se α è razionale, $\alpha = m/n$, la stretta crescenza di x^α consegue dal fatto (teorema 3.7 a pagina 80) che per la (5.1) la funzione si presenta composta mediante due funzioni strettamente crescenti (la funzione potenza di esponente m e quella di esponente $1/n$).

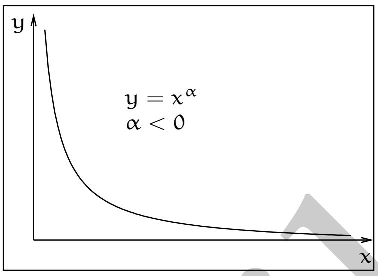
- Nel caso che α sia irrazionale la verifica della stretta crescenza di x^α è meno immediata e per brevità vi rinunceremo.



(a) Esponente maggiore di 1.



(b) Esponente minore di 1 e maggiore di 0.



(c) Esponente minore di 0.

Figura 5.3: Funzione potenza di esponente reale.

Si ha $f(0) = 0$ ed $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$, sicché zero è il minimo della funzione assunto nel punto zero.

Poiché per ogni $y > 0$ l'equazione nell'incognita x

$$x^\alpha = y \tag{5.2}$$

ammette l'unica soluzione

$$x = y^{\frac{1}{\alpha}}$$

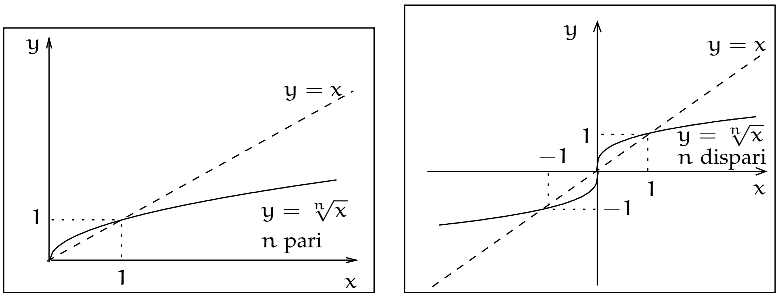
il codominio della funzione è l'intervallo $[0, +\infty[$, e l'inversa di f, che è si ottiene risolvendo la (5.2), è definita per $y \in [0, +\infty[$. Dunque l'inversa della potenza di esponente α è la funzione di esponente $1/\alpha$.

Osserviamo ora che, qualunque sia α, si ha $f(1) = 1$, sicché il diagramma passa per il punto $(1, 1)$ oltre che per il punto (0.0). Poiché per $\alpha = 1$ la funzione si riduce alla funzione identica, è naturale confrontare quest'ultima con x^α per $\alpha \neq 1$. Si ha

$$\text{con } \alpha > 1 \quad x^\alpha > x \qquad \text{per } x > 1, \tag{5.3}$$
$$\text{con } \alpha < 1 \quad x^\alpha > x \qquad \text{per } 0 < x < 1 \tag{5.4}$$
$$\text{con } \alpha > 1 \quad x^\alpha < x \qquad \text{per } 0 < x < 1, \tag{5.5}$$
$$\text{con } \alpha < 1 \quad x^\alpha < x \qquad \text{per } x > 1 \tag{5.6}$$

Infatti per esempio supposto $\alpha > 1$, per ricavare i punti $x > 0$ in cui $x^\alpha > x$ cioè (dividendo per x e si può fare perché $x > 0$ e quindi diverso da zero)

$$\frac{x^\alpha}{x} > 1 \iff x^{\alpha-1} > 1^{\alpha-1} \implies x > 1$$



(a) Indice pari. **(b)** Indice dispari.

Figura 5.4: Funzione radice $\sqrt[n]{x}$.

e quindi la (5.3) è dimostrata.
Mentre supposto $\alpha < 1$, per ricavare i punti $x > 0$ in cui $x^\alpha > x$ si procede così:

$$x^\alpha > x \iff \frac{x}{x^\alpha} < 1 \iff x^{1-\alpha} < 1^{1-\alpha} \implies x < 1$$

e quindi la (5.4) è dimostrata. Analogamente si dimostrano le (5.5) e (5.6).

In base alle (5.3)–(5.6) possiamo dire che se $\alpha > 1$ il diagramma è situato al disotto della bisettrice del primo quadrante per $x \in]0, 1[$, al disopra della stessa bisettrice per $x > 1$; circostanze opposte si verificano se $\alpha > 1$.

Le proprietà della funzione potenza x^α nel caso $\alpha < 0$, si deducono immediatamente da quelle della potenza di esponente positivo, osservando che

$$x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$$

si riconosce così che la funzione è strettamente decrescente (infatti essendo $\alpha < 0$ si ha che $-\alpha > 0$, per cui $x^{-\alpha}$ è una funzione. come abbiamo dimostrato poco fa, positiva e crescente e quindi per la (3.16) di pagina 77 la sua reciproca è decrescente) ed ha per codominio $]0, +\infty[$. Conseguentemente è invertibile e la sua inversa è la funzione potenza di esponente $1/\alpha$.

I diagrammi della funzione x^α nei vari casi sono illustrati in figura 5.3. Notiamo che i diagrammi delle funzioni x^α e $x^{1/\alpha}$, l'una l'inversa dell'altra, sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo quadrante.

5.2 FUNZIONE RADICE

La *funzione radice* è la seguente

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \qquad n \in \mathbb{N}, n > 1$$

definita in $\mathbb{R}$ se n è dispari, in $[0, +\infty[$ se n è pari (volume 1). Ricordando che

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \qquad \text{per } x \geqslant 0,$$

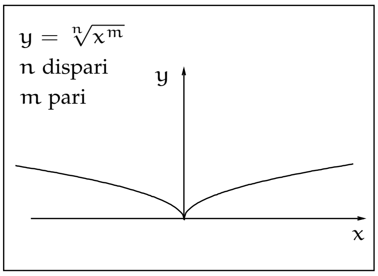
si ha che il diagramma per $x \geqslant 0$ di $\sqrt[n]{x}$ coincide con quello della funzione potenza $x^{1/n}$ che è una funzione potenza a esponente reale minore di 1 come quello indicato in figura 5.3 e riportato nella figura 5.4a. Per $x < 0$ si

n	m	Dominio
Dispari	>0	$\mathbb{R}$
Dispari	<0	$\mathbb{R}-\{0\}$
Pari	>0 e dispari	$[0,+\infty[$
Pari	<0 e dispari	$]0,+\infty[$
Pari	>0 e pari	$\mathbb{R}$
Pari	<0 e pari	$\mathbb{R}-\{0\}$

Tabella 5.1: Dominio della funzione radice.

n	m	Parità
Dispari	Pari	Pari
Dispari	Dispari	Dispari
Pari	Pari	Pari

Tabella 5.2: Parità della funzione radice.



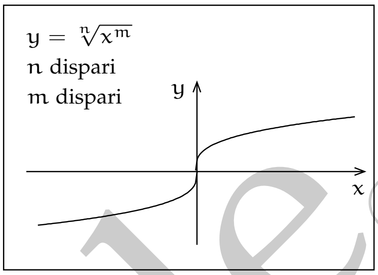


Figura 5.5: Funzione radice $\sqrt[n]{x^m}$.

ha che $\sqrt[n]{x}$ non è definita se n è pari mentre se n è dispari è una funzione dispari infatti

$$\sqrt[n]{-x} = \sqrt[n]{(-1)x} = \sqrt[n]{-1}\,\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{x}$$

quindi il diagramma per $]-\infty, 0]$ si ottiene facendo la simmetria rispetto all'origine del diagramma per $[0, +\infty[$ (figura 5.4b).

Esempio 5.1. La funzione $\sqrt[3]{x}$ definita in $\mathbb{R}$, è il prolungamento in una funzione dispari della potenza $x^{1/3}$ (che è definita solo per $x \geqslant 0$). Per $x < 0$ non è da considerarsi una potenza, in quanto non ha le proprietà delle potenze, basta osservare che applicando le proprietà delle potenze si avrebbe

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{12}} = \left(\left(x^2\right)^{\frac{1}{12}}\right)^2 \geqslant 0$$

il che è assurdo per $x < 0$.

Più in generale detto m un numero intero, consideriamo la funzione

$$g(x) = \sqrt[n]{x^m}$$

composta mediante la potenza di esponente intero m e la radice n-esima. Distinguiamo i vari casi: Per analizzare i vari casi notiamo che

- Se $m < 0$ la funzione $g(x)$ non è definita per $x = 0$.
- Se n è dispari la funzione è debita in tutto $\mathbb{R}$ (eventualmente escluso lo zero).
- Se n è pari è definita solo per valori > 0 (eventualmente compreso lo zero) per m dispari e in tutto $\mathbb{R}$ (eventualmente zero escluso) se m è pari.

Il dettaglio di tali casi è nella tabella 5.1.[1] Mentre in tabella 5.2 sono schematizzati i casi di quando la giunzione $g(x)$ è pari e quando è dispari, notiamo a tal proposito che non è presente il caso n pari e m dispari in quanto in questo caso la funzione non è definita per valori negativi e quindi non ha senso parlare di parità.

In ogni caso per $m > 0$ ($m < 0$) la restrizione di g all'intervallo $[0, +\infty[$ (all'intervallo $]0, +\infty[$) coincide con la funzione potenza di esponente razionale m/n, sicché la $g(x)$ quando definita anche per valori negativi di x, è il prolungamento della potenza di esponente razionale in una funzione pari o dispari. Pertanto il diagramma si traccia a partire da quello della potenza, per simmetria rispetto all'asse y o rispetto all'origine (figura 5.5). Il caso in cui m e n sono pari (con $m \neq n$ altrimenti si ha la funzione identica) è da ricondursi al caso in cui n è pari ed m è dispari o viceversa oppure al caso in cui sono entrambi dispari, infatti se m e n sono pari m/n si può semplificare almeno una volta per 2. Nel caso in cui n è pari e m è dispari il diagramma è la restrizione a $[0, +\infty[$ (oppure a $]0, +\infty[$ se $m < 0$) del diagramma di figura 5.5a.

Esempio 5.2. Osserviamo che si ha

$$\sqrt[8]{x^2} = \sqrt[4]{|x|}$$

e quindi risulta

$$\sqrt[8]{x^2} = |x|^{\frac{1}{4}}$$

ma non

$$\sqrt[8]{x^2} = x^{\frac{1}{4}}$$

infatti la funzione $\sqrt[8]{x^2}$ è il prolungamento in una funzione pari della potenza di esponente $1/4$ e si presenta come composta della funzione valore assoluto e della potenza di esponente $1/4$.

Le proprietà di crescenza o decrescenza della funzione g si deducono in modo ovvio da quelle della potenze. Se m ed n sono entrambi dispari, le funzioni

$$\sqrt[n]{x^m}, \qquad \sqrt[n]{x^{-m}}$$

sono invertibili, e le loro inverse, supposto $m > 0$, sono rispettivamente

$$\sqrt[m]{x^n}, \qquad \sqrt[m]{x^{-n}}$$

5.3 FUNZIONE ESPONENZIALE

Dato un numero reale $a > 0$, funzione definita per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a^x$$

si chiama *funzione esponenziale*. Per $a = 1$ si ha $a^x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione esponenziale si riduce alla funzione costante pari a 1 già studiata nel paragrafo 3.8.1 a pagina 64: pertanto d'ora in poi supporremo $a \neq 1$.

1 In questo contesto parliamo di numeri pari e dispari anche per numeri interi negativi, intendendo che un numero intero è pari [dispari] se lo è il suo valore assoluto.

Osservazione 5.1. Una funzione esponenziale è una funzione che quando la variabile indipendente aumenta per addizione quella dipendente aumenta per moltiplicazione,quindi *trasforma somme in moltiplicazioni*; esempio

$$5^n$$

per $n = 1, 2, 3$ si ha $5, 25, 125$.

Osservazione 5.2. Dati due numeri reale λ e μ, con $\lambda > \mu$, poiché la funzione potenza $x^{\lambda-\mu}$ ha l'esponente maggiore di zero è strettamente crescente in $[0, +\infty[$ (come si vede dalle figure 5.3a–5.3b a pagina 128) ed assume il valore 1 per $x = 1$, per cui per $x > 1$ assumerà valori maggiori di 1. Questa osservazione ci servirà nella dimostrazione della seguente proposizione.

Proposizione 5.1. *La funzione a^x è strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $a < 1$; di conseguenza la funzione è invertibile.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso $a > 1$. Per definizione dire che a^x è strettamente crescente equivale a dire che

$$x_1 < x_2 \implies a^{x_1} < a^{x_2} \tag{5.7}$$

Dire che $x_1 < x_2$ significa dire che $x_2 - x_1 > 0$, quindi accade che

$$a^{x_2 - x_1} > 1 \tag{5.8}$$

infatti $a^{x_2-x_1}$ è una potenza di base maggiore di 1 ed esponente maggiore di zero e quindi maggiore di 1 come si vede dalla figure 5.3a–5.3b a pagina 128. Dalla (5.8) per le proprietà delle potenze segue

$$a^{x_2-x_1} > 1 \iff \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1 \iff a^{x_2} > a^{x_1}$$

e quindi la (5.7) è dimostrata.
Consideriamo ora il caso $a < 1$ (la dimostrazione è analoga a quella del caso $a > 1$). Per definizione dire che a^x è strettamente decrescente equivale a dire che

$$x_1 < x_2 \implies a^{x_1} > a^{x_2} \tag{5.9}$$

Dire che $x_1 < x_2$ significa dire che $x_2 - x_1 > 0$, quindi accade che

$$a^{x_2 - x_1} < 1 \tag{5.10}$$

infatti $a^{x_2-x_1}$ è una potenza di base minore di 1 ed esponente maggiore di zero e quindi maggiore di 1 come si vede dalla figura 5.3a a pagina 128. Dalla (5.10) per le proprietà delle potenze segue

$$a^{x_2-x_1} < 1 \iff \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} < 1 \iff a^{x_2} < a^{x_1}$$

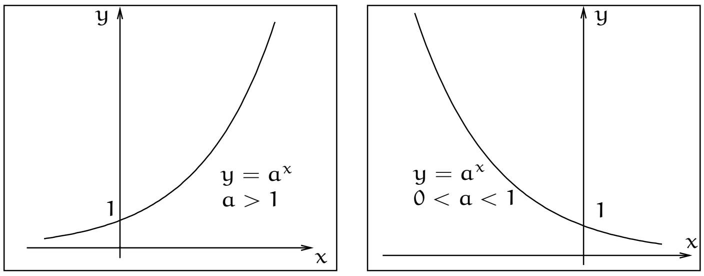
e quindi la (5.9) è dimostrata.
Essendo quindi a^x strettamente monotona sia per $a > 1$ che per $a < 1$ allora è invertibile. □

La funzione esponenziale a^x assume solo valori positivi (dato che la base $a > 0$); inoltre il codominio della funzione esponenziale di base $a \neq 1$ è l'intervallo $]0, +\infty[$, ossia per ogni $y > 0$ l'equazione

$$a^x = y$$

nell'incognita x ammette soluzione.

In definitiva possiamo dire che per la funzione esponenziale $f(x) = a^x$, con $a > 0$, è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ha per codominio $\mathbb{R}^+$, inoltre, vedi figura 5.6



(a) Esponente maggiore di 1. **(b)** Esponente compreso tra 0 e 1.

Figura 5.6: Funzione esponenziale.

- se $a > 1$ è strettamente crescente;
- se $a < 1$ è strettamente decrescente;
- passa per il punto $(1, 1)$.

5.4 EQUAZIONE ESPONENZIALE

Per introdurre, nel paragrafo seguente, il concetto di "logaritmo" dobbiamo necessariamente definire cosa si intende per equazione esponenziale. Maggiori dettagli sulla risoluzione di equazioni esponenziali li vedremo nel paragrafo 6.3 a pagina 155.

Un'*equazione esponenziale* è un'equazione in cui l'incognita x compare ad esponente di una potenza. In altri termini un'equazione esponenziale traduce in forma matematica il seguente problema: dati due numeri reali *positivi* a e q, esiste qualche numero reale x, che, dato per esponente ad a, dà il numero q? Questo problema è espresso dalla relazione

$$a^x = q \tag{5.11}$$

che si dice appunto equazione *equazione esponenziale*.

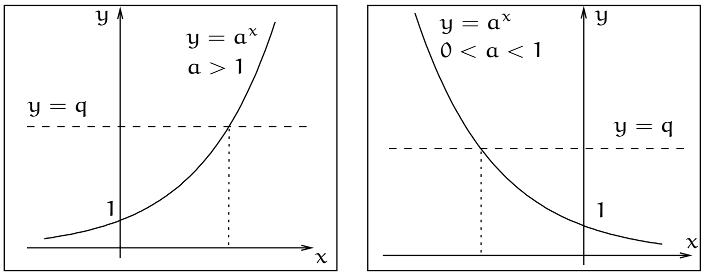
Il modo più semplice per risolvere l'equazione esponenziale è graficamente, infatti tenendo conto che l'equazione 5.11 è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = a^x \\ y = q \end{cases}$$

se tracciamo le curve $y = a^x$ (che è la funzione esponenziale) e $y = q$ (che è retta parallela all'esse dell ascisse passante per il punto $(0, q)$), la soluzione x dell'equazione esponenziale è l'ascissa del punto P intersezione tra le due curve. Dalla figura 5.7) si vede che:

A. L'equazione esponenziale (5.11) non ammette soluzioni per $q < 0$. Infatti la funzione esponenziale sia per $a > 1$ che per $a < 1$ si estende solo nel primo e secondo quadrante del piano, mentre la retta $y = q$ per $q < 0$ appartiene al terzo e quarto quadrante.

B. L'equazione esponenziale (5.11) non ammette soluzioni quando $q = 0$. Infatti la curva esponenziale non incontra l'asse delle ascisse.



(a) Esponente maggiore di 1. (b) Esponente compreso tra 0 e 1.

Figura 5.7: Equazione esponenziale.

c. L'equazione esponenziale (5.11) ammette una e una sola soluzione quando q è positivo. Infatti per la curva $y = a^x$ definita per ogni x reale è strettamente monotona e quindi biunivoca tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$ e quindi ad ogni valore di y (nel nostro caso $y = q$) appartenente al codominio della funzione corrisponde uno e un sol valore di x.

Sempre osservando la figura 5.7 si può decidere anche il segno della soluzione, precisamente si deduce che

$$a > 1 \implies \begin{cases} x < 0 & \text{se } 0 < q < 1, \\ x = 0 & \text{se } q = 1, \\ x > 0 & \text{se } q > 1, \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \implies \begin{cases} x > 0 & \text{se } 0 < q < 1, \\ x = 0 & \text{se } q = 1, \\ x < 0 & \text{se } q > 1, \end{cases}$$

Notiamo, infine, che per $a = 1$ e $q = 1$ l'equazione (5.11) ha infinite soluzioni, mentre per $a = 1$ e $q \neq 1$ non ha soluzioni.

5.5 LOGARITMI

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che l'equazione

$$a^x = q$$

ammette sempre una e una sola soluzione, sotto la condizione che a e q siano numeri reali positivi ed a è diverso dall'unità. Il numero x che soddisfa l'equazione esponenziale si dice *logaritmo* del numero q in base a e si denota con

$$\log_a q$$

il numero q prende il nome di *argomento* del logaritmo.
Le due equazioni $a^x = q$ e $x = \log_a q$ sono quindi equivalenti tra loro; in simboli

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, \forall q \in \mathbb{R}^+, \quad a^x = q \iff x = \log_a q} \tag{5.12}$$

In conclusione possiamo dire che: *il logaritmo di certo numero* q (positivo) *in una data base* a (positiva e diversa da 1) *è l'esponente che bisogna dare alla base* a *per ottenere l'argomento* q.

Osservazione 5.3. Inversamente dall'esponenziale (che trasforma somme in moltiplicazioni) il logaritmo è quella funzione che quando la variabile indipendente si moltiplica quella dipendente si addiziona, quindi *trasforma moltiplicazioni in somme*.

Esempio 5.3. In base alla (5.12) si può per esempio, osservare che l'uguaglianza 2^3 può trasformarsi nell'uguaglianza $3 = \log_2 8$, passando così dalla forma esponenziale alla forma logaritmica. Viceversa, scrivere, per esempio, che $-2 = \log_3 \frac{1}{9}$ equivale a scrivere che $3^{-2} = \frac{1}{9}$. E così, analogamente, sono equivalenti le seguenti forme:

$$
\begin{aligned}
\log_{10} 1000 = 3 &\iff 10^3 = 1000 \\
m = \log_n p &\iff m^n = p \\
a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} &\iff \frac{1}{3} = \log_a \sqrt[3]{a} \\
2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{8}} &\iff -\frac{3}{4} = \log_2 \sqrt[4]{\frac{1}{8}} \\
\frac{1}{5} = \log_{32} 2 &\iff 32^{\frac{1}{5}} = 2 \\
81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9 &\iff \frac{1}{2} = \log_{81} 9
\end{aligned}
$$

Notiamo che per ogni $a \in \mathbb{R}^+$

$$\boxed{\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1} \tag{5.13}$$

infatti l'esponente da dare a per avere 1 è zero qualunque sia a, e l'esponente da dare ad a per avere a stesso è uno qualunque sia a.

Riguardo il segno del logaritmo possiamo dire che: se la base è maggiore di 1, i numeri maggiori di 1 hanno logaritmi positivi e quelli minori di 1 hanno logaritmi negativi; viceversa, se la base è minore di 1, i numeri maggiori di 1 hanno logaritmi negativi e quelli minori di 1 logaritmi positivi.

Esempio 5.4. Adesso vedremo tanti esempi di logaritmi da cui si può anche verificare l'affermazione precedente sul segno di un logaritmo nota la base e l'argomento.

$$
\begin{aligned}
&\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3; &&\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3; \\
&\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3; &&\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\log_5 25 = 2; & \log_{\frac{4}{3}} \frac{16}{9} = 2; & \log_2 32 = 5; \\
\log_4 \frac{1}{4} = -1 & \log_3 \frac{1}{27} = -3; & \log_{\frac{3}{2}} \frac{8}{27} = -3; \\
\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2; & \log_{\frac{1}{5}} 25 = -2 & \log_2 \frac{1}{16} = 4; \\
\log_{\frac{3}{4}} \frac{27}{64} = 3; & \log_{0.1} 0.001 = 3; & \log_{\frac{1}{10}} 10000 = -4
\end{array}
$$

$$\log_2 \sqrt{\frac{1}{128}} = -\frac{7}{2}, \text{ infatti } 2^{-\frac{7}{2}} = \sqrt{2^{-7}} = \sqrt{\frac{1}{128}}$$

$$\log_{\frac{2}{5}} \sqrt[3]{\frac{25}{4}} = -\frac{2}{3}, \text{ infatti } \left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{25}{4}}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{32}} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{2^5}} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{5}{3}$$
$$\log_{\frac{1}{5}} 0.008 = \log_{0.2} (0.2)^3 = 3$$

5.5.1 Logaritmi decimali e naturali

Di solito nelle applicazioni pratiche i logaritmi che si adoperano sono di due possibili basi entrambe maggiori di 1. Essi sono

- I logaritmi *naturali* o *neperiani* la cui base è il *numero di Nepero* e (detto anche *numero di Euelro*), numero irrazionale che vale $e = 2.71828\ldots$[2]
- I logaritmi *decimali*, raramente detti anche logaritmi *volgari* o *di Briggs*, la cui base è 10.

Il logaritmo neperiano di un certo numero positivo x si indica anche con $\ln x$ omettendo la base, quindi

$$\log_e x = \ln x$$

mentre il logaritmo decimale di x si indica a volte anche con $\operatorname{Log} x$ (prima lettera maiuscola), quindi

$$\operatorname{Log} x = \log_{10} x$$

Qualche volta quando si scrive $\log x$ si intende $\log_{10} x$.

Osservazione 5.4. Nelle calcolatrici elettroniche tipicamente è possibile calcolare direttamente solo logaritmi naturali o decimali, se si ha il logaritmo in un'altra base occorre applicare una formula come vedremo nel paragrafo 5.7.1 a pagina 140.

5.6 FUNZIONE LOGARITMICA

Nel paragrafo 5.3 a pagina 131 abbiamo osservato che la funzione esponenziale, di equazione $y = a^x$, è una funzione biunivoca tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$: essa è quindi invertibile.

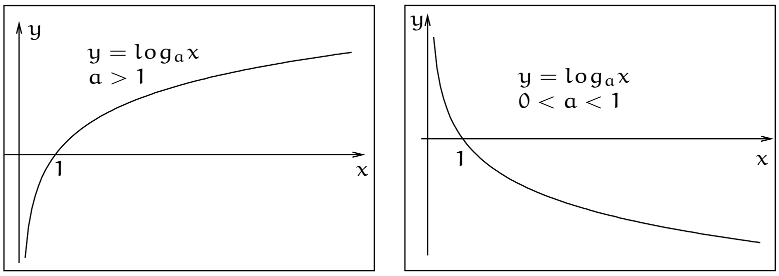
La funzione inversa si ottiene ricavando x in funzione di y, operazione che per quanto già detto è possibile se $y > 0$. In tal caso, sarà per definizione

$$x = \log_a y$$

Avendo (paragrafo 5.4 a pagina 133) già dimostrato l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione esponenziale, resta dimostrata l'esistenza e l'unicità del logaritmo di qualsiasi numero positivo. Concluderemo quindi che esiste la *funzione logaritmica* di base a ($a > 0$, $a \neq 1$) che associa ad ogni numero positivo il corrispondente logaritmo in base a

$$f\colon x \to \log_a x$$

2 Non possiamo definire il numero di Nepero in questa occasione perché esso si definisce attraverso un limite o una serie, argomenti dei volumi successivi; è importante perché può essere adoperato per rappresentare i numeri complessi, è invariate rispetto a particolari operazioni (derivazione e integrazione), etc. Nel volume 5, sfruttando la formula di Taylor-Lagrange, dimostreremo che il numero di Nepero è irrazionale.



(a) Base maggiore di 1.　　**(b)** Base compresa tra 0 e 1.

Figura 5.8: Funzione logaritmica.

cioè la funzione di equazione

$$y = \log_a x$$

Poiché la funzione logaritmica è la funzione inversa della funzione esponenziale, il suo diagramma si otterrà sottoponendo i punti della curva esponenziale alla simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, ottenendo le curve in figura 5.8. Essendo inversa di funzione strettamente monotona anche la funzione logaritmica è strettamente monotona, precisamente strettamente crescente quando la base è maggiore di 1 e strettamente decrescente quando la base è minore di 1. Dalla figura 5.8 è evidente che il dominio della funzione logaritmica è $\mathbb{R}^+$ mentre il codominio è tutto $\mathbb{R}$.

5.7 PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Qualunque sia la base, i logaritmi godono di importanti proprietà che derivano dalle proprietà delle potenze. Tali proprietà sono quelli che rendono utili i logaritmi e che quindi ne hanno giustificato l'introduzione in matematica. Come vedremo abbiamo che il logaritmo è in grado di trasformare prodotti in somme, rapporti in differenze, potenze in prodotti, ciò trova una grande utilità nelle materie ingegneristiche perché permette di maneggiare agevolmente numeri grandi, di sommare diagrammi al posto di moltiplicarli e così via.

Teorema 5.1. *Il logaritmo di un prodotto di due o più numeri positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori.* In simboli nel caso di due numeri

$$\boxed{\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n \qquad a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, m \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{R}^+.}$$

Dimostrazione. Poniamo

$$x = \log_a m, \qquad y = \log_a n.$$

Per definizione di logaritmo

$$m = a^x, \qquad n = a^y.$$

Moltiplicando membro a membro le due ultime uguaglianze si ottiene

$$mn = a^x a^y = a^{x+y}$$

Si vede così che $x + y$ è l'esponente da darsi alla base a per avere mn, per cui per definizione di logaritmo

$$\log_a(mn) = x + y = \log_a m + \log_a n \qquad \square$$

Esempio 5.5. Calcolare

$$\log_{10}(10 \cdot 100)$$

Per la proprietà del logaritmo del prodotto

$$\log_{10}(10 \cdot 100) = \log_{10} 10 + \log_{10} 100 = 1 + 2 = 3$$

Osservazione 5.5. Nel teorema 5.1 è essenziale l'ipotesi che *tutti* i fattori siano positivi. Infatti per esempio

$$\log_2[(-2) \cdot (-4)] \neq \log_2(-2) + \log_2(-4)$$

perché il primo membro esiste ed è $\log_2 8 = 3$, mentre il secondo membro non ha significato, non esistendo i logaritmi (in qualsiasi base) di numeri negativi.

Teorema 5.2. *Il logaritmo di un rapporto di due o più numeri positivi è uguale alla differenza fra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore.* In simboli

$$\boxed{\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n \qquad a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, m \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{R}^+.}$$

Dimostrazione. Poniamo

$$x = \log_a m, \qquad y = \log_a n.$$

Per definizione di logaritmo

$$m = a^x, \qquad n = a^y.$$

Dividendo membro a membro le due ultime uguaglianze si ottiene

$$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Si vede così che $x - y$ è l'esponente da darsi alla base a per avere m/n, per cui per definizione di logaritmo

$$\log_a \frac{m}{n} = x - y = \log_a m - \log_a n \qquad \square$$

Osservazione 5.6. Anche nel teorema 5.2 è essenziale l'ipotesi che numeratore e denominatore dell'argomento del logaritmo *siano positivi*. Infatti, per esempio

$$\log_3 \frac{-9}{-3} \neq \log_3(-9) - \log_3(-3)$$

perché il primo membro esiste ed è $\log_3 3 = 1$, mentre il secondo membro non ha significato, non esistendo i logaritmi (in qualsiasi base) di numeri negativi.

Teorema 5.3. *Il logaritmo della potenza di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo del numero.* In simboli

$$\boxed{\log_a b^m = m \log_a b \qquad a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, m \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+.}$$

Dimostrazione. Poniamo

$$x = \log_a b \text{ che equivale a } b = a^x$$

Elevando ambedue i membri di quest'ultima uguaglianza alla m-esima potenza si ha

$$b^m = (a^x)^m \iff b^m = a^{xm}$$

Per definizione di logaritmo mx è l'esponente da dare ad a per avere b^m cioè

$$\log_a b^m = mx = m \log_a b.$$

Un altro modo per dimostrare questa proprietà e quello di sfruttare il teorema sul logaritmo del prodotto (teorema 5.1) cioè

$$\log_a b^m = \log_a \underbrace{(bb \cdots b)}_{m \text{ volte}} = \underbrace{\log_a b + \cdots + \log_a b}_{b \text{ volte}} = m \log_a b$$

□

Osservazione 5.7. È essenziale, nel teorema 5.3, l'ipotesi che la base della potenza sia positiva. Infatti, per esempio,

$$\log_3(-3)^4 \neq 4 \log_3(-3)$$

perché al primo membro si ha

$$\log_3(-3)^4 = \log_3 3^4 = 4$$

mentre $4 \log_3(-3)$ non ha significato non esistendo il logaritmo (in qualunque base) di un numero negativo.

Osservazione 5.8. Il teorema 5.3 vale, come abbiamo visto, qualunque sia l'esponente della potenza. In particolare vale quando l'esponente è un numero razionale. Sia per esempio, $m = 1/n$, si avrà

$$\log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b$$

ma $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ quindi

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

e si potrà così affermare che: *il logaritmo di un radicale è uguale al quoziente del logaritmo del radicando per l'indice della radice.*

Segnaliamo, per completezza che la monotonia della funzione logaritmica si può dimostrare anche a partire dalle proprietà dei logaritmi visti. Come osservato in precedenza se la base è maggiore di 1 la funzione è strettamente crescente se invece è minore di 1 la funzione è strettamente decrescente; in simboli

$$x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 < \log_a x_2 \qquad \text{se } a > 1 \qquad (5.14)$$

$$x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 > \log_a x_2 \qquad \text{se } 0 < a < 1 \qquad (5.15)$$

Dimostriamo prima la (5.14): essendo per ipotesi $x_1 < x_2$ equivale a dire che

$$\frac{x_2}{x_1} > 1$$

ora se abbiamo un logaritmo di base a maggiore di 1 ed argomento maggiore di 1 il logaritmo sarà positivo

$$\log_a \frac{x_2}{x_1} > 0$$

ma per le proprietà del rapporto

$$\log_a \frac{x_2}{x_1} > 0 \iff \log_a x_2 - \log_a x_1 > 0 \iff \log_a x_2 > \log_a x_1$$

e la (5.14) è dimostrata.
Dimostriamo la (5.15): essendo per ipotesi $x_1 < x_2$ equivale a dire che

$$\frac{x_2}{x_1} > 1$$

ora se abbiamo un logaritmo di base a maggiore minore di 1 (e maggiore di zero) ed argomento maggiore di 1 il logaritmo sarà negativo

$$\log_a \frac{x_2}{x_1} < 0$$

ma per le proprietà del rapporto

$$\log_a \frac{x_2}{x_1} < 0 \iff \log_a x_2 - \log_a x_1 < 0 \iff \log_a x_2 < \log_a x_1$$

e la (5.15) è dimostrata.

5.7.1 Altre proprietà dei logaritmi

Alle tre proprietà dei logaritmi prima dimostrate, possiamo aggiungere anche le seguenti che derivano direttamente dalla definizione di logaritmo e che risultano di grande utilità nelle applicazioni.

Proposizione 5.2. *Per i logaritmi valgono le se seguenti proprietà*

$$\log_a a^m = m \qquad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \tag{5.16}$$

$$a^{\log_a b} = b \qquad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, b > 0 \tag{5.17}$$

$$\log_a b = \log_a c \log_c b \qquad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, b \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \tag{5.18}$$

Dimostrazione. La dimostrazione della (5.16) è immediata, infatti per definizione m risulta l'esponente da dare ad a per avere a^m.
Anche la dimostrazione della (5.17) è immediata, infatti per definizione $\log_a b$ è l'esponente da dare ad a per avere b e ciò è proprio quello che sta scritto nella (5.17).
Per dimostrare la (5.18) poniamo

$$x = \log_a c, \qquad y = \log_c b$$

da cui, per definizione di logaritmo, segue rispettivamente

$$a^x = c, \qquad c^y = b$$

Eleviamo ambo i membri dell'uguaglianza $a^x = c$ alla y-esima potenza

$$a^{xy} = c^y$$

ma $c^y = b$ quindi

$$a^{xy} = b \iff xy = \log_a b \iff \log_a c \log_c b = \log_a b \qquad \square$$

Osservazione 5.9. Come caso particolare della (5.18) si ha

$$\boxed{\log_a c = \frac{1}{\log_c a}} \tag{5.19}$$

infatti nella (5.18) ponendo $b = a$ si ottiene

$$\log_a a = \log_a c \log_c a \iff 1 = \log_a c \log_c a \iff \log_a c = \frac{1}{\log_c a}$$

La (5.19) si potrebbe dimostrare anche in un altro modo: ponendo

$$x = \log_c a$$

che equivale a dire

$$c^x = a$$

Elevando ambo i membri alla potenza di esponente $\frac{1}{x}$ si ha

$$(c^x)^{\frac{1}{x}} = a^{\frac{1}{x}} \iff c = a^{\frac{1}{x}} \iff \frac{1}{x} = \log_a c$$

sostituendo ad x il suo valore ($\log_c a$) si ha la (5.19)

Osservazione 5.10 (Cambiamento di base)**.** La (5.18) permette di passare da un logaritmo in una base data ad un altro di base diversa. Infatti dalla (5.18) si ricava

$$\boxed{\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} \qquad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, b \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}} \tag{5.20}$$

che noti i logaritmi in base a, permette di calcolare i logaritmi in una nuova base c, tale proprietà prende il nome di *proprietà del cambiamento di base* dei logaritmi.

L'utilità del cambiamento di base è evidente quando si deve calcolare un logaritmo in una base che non sia 10 o il numero di nepero e; come già accennato le calcolatrici permettono di calcolare solo logaritmi decimali o neperiani quindi se abbiamo da calcolare un logaritmo in base diversa con la proprietà del cambiamento di base ne possiamo calcolare il valore attraverso il calcolo di due logaritmi in base 10 o e.