

Ivan Gentile
Matematica per Molti - Volume 2
Copyright© 2018, 1^a edizione

Gentile[©]

COLOPHON

Nessuna parte di questa pubblicazione può essere, tradotta, riprodotta o trasmessa senza l'autorizzazione dell'autore. Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% del volume. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale possono avvenire, per un numero di pagine non superiori al 15% del volume, solo a seguito di specifica autorizzazione dell'autore.

Questo lavoro è stato realizzato con \LaTeX .

I nomi commerciali, i loghi e i marchi registrati menzionati nel testo appartengono ai rispettivi proprietari.

Nel frontespizio è riprodotto il logo di *Matematica per Molti* di proprietà di Ivan Gentile.

CONTATTI

<http://www.matematicaxmolti.it> - Sito ufficiale

info@matematicaxmolti.it - Email per informazioni

I. Gentile[©]

La semplicità è una complessità risolta.

— Costantino Brancusi

A chi trasmette voglia di fare.

I. Gentile[©]

I. Gentile[©]

INDICE

PREFAZIONE ix

INTRODUZIONE xiii

1	GEOMETRIA RAZIONALE	1
1.1	Qualche cenno storico	2
1.2	I concetti primitivi	3
1.3	Segmento e distanza tra due punti	4
1.4	Postulati della geometria euclidea	5
1.5	Figure e curve	7
1.6	Angolo piano	9
1.7	Congruenza tra figure	13
1.8	Confronto e operazioni sui segmenti	14
1.8.1	Operazioni con i segmenti	16
1.9	Misura di punti, curve e segmenti	18
1.10	Operazioni con gli angoli	18
1.10.1	Operazioni con gli angoli	20
1.11	Misura degli angoli	22
1.11.1	Gradi sessagesimali	22
1.11.2	Grado centesimale	26
1.12	Angoli particolari	27
1.13	Spezzate, poligoni e loro elementi	30
1.14	Rette perpendicolari e parallele	32
1.15	Luoghi geometrici	36
1.16	Riassunto	38
2	TRIANGOLO	41
2.1	Generalità	41
2.2	Classificazione dei triangoli	41
2.2.1	Classificazione rispetto ai lati	41
2.2.2	Classificazione rispetto agli angoli	41
2.3	Criteri di congruenza dei triangoli	42
2.4	Applicazioni dei criteri di congruenza	45
2.4.1	Triangolo isoscele	45
2.4.2	Triangolo equilatero	47
2.4.3	Triangolo rettangolo	47
2.5	Relazioni tra gli angoli di un triangolo	49
2.6	Altezza, mediana, bisettrice	51
2.7	Punti notevoli di un triangolo	55
2.8	Disuguaglianze tra elementi	58
2.8.1	Disuguaglianze tra elementi di un triangolo	58
2.8.2	Disuguaglianze tra elementi di due triangoli	61
2.9	Il triangolo nella pratica	62
2.9.1	Costruire un triangolo a partire da tre segmenti	62
2.9.2	Costruzione grafica di un triangolo	62
2.9.3	Indeformabilità di un triangolo	63
2.10	Altri teoremi	63
2.11	Riassunto	66
3	APPROFONDIMENTO SULLE RETTE	67
3.1	Rette tagliate da una trasversale	67
3.2	Condizioni sufficienti al parallelismo	67

3.3	Costruzione della parallela	69
3.4	Postulato di Euclide o delle parallele	70
3.5	Implicazioni del parallelismo	70
3.5.1	Congruenza tra angoli	73
3.6	Distanza di rette parallele	74
3.7	Proiezioni su una retta	75
3.8	Fascio di rette parallele	77
3.9	Riassunto	79
4	TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE	81
4.1	Isometrie	81
4.2	Proprietà delle isometrie	81
4.3	Identità	83
4.4	Simmetria centrale	84
4.5	Simmetria assiale	86
4.5.1	Asse di simmetria di una figura	88
4.6	Segmenti orientati, asse e vettori	89
4.6.1	Componenti di un vettore	91
4.7	Operazioni sui vettori	92
4.7.1	Somma tra vettori	93
4.7.2	Prodotto di un vettore per un numero	94
4.7.3	Differenza tra vettori	95
4.7.4	Prodotto scalare	95
4.7.5	Prodotto vettoriale	97
4.7.6	Prodotto misto	98
4.8	Traslazione	99
4.9	Rotazione	100
4.10	Omotetia	102
4.11	Composizioni	104
4.12	Similitudine	104
4.12.1	Applicazioni	107
4.13	Riassunto	107
5	QUADRANGOLI E POLIGONI	111
5.1	Criterio di congruenza dei poligoni	111
5.2	Somma degli angoli di un poligono	111
5.3	Relazione tra lati di un poligono	113
5.4	Parallelogramma	113
5.5	Rettangolo	116
5.6	Rombo	118
5.7	Quadrato	120
5.8	Deformabilità del quadrilatero	120
5.9	Trapezio	121
5.10	Riassunto	123
6	CIRCONFERENZA E CERCHIO	125
6.1	Definizioni preliminari	125
6.2	Relazioni e operazioni tra archi	128
6.3	Misura degli archi	131
6.4	Proprietà delle circonferenze	131
6.5	Posizioni tra retta e circonferenza	134
6.6	Posizioni tra circonferenze	137
6.7	Poligoni inscritti e circoscritti	139
6.8	Poligoni regolari	141
6.9	Angoli alla circonferenza	142
6.10	Sezione e numero aureo	145

6.10.1	Successione di Fibonacci	148
6.10.2	Curiosità	149
6.11	Problemi grafici	149
6.11.1	Poligoni regolari	149
6.11.2	Tracciare una circonferenza	150
6.11.3	Circonferenza che passa per tre punti non allineati	151
6.11.4	Determinare il centro di una circonferenza	151
6.11.5	Condurre da un punto le tangenti ad una circonferenza	151
6.11.6	Inscrivere e circoscrivere una circonferenza	152
6.12	Riassunto	154
6.12.1	Confronto, somma, differenza tra archi	154
6.12.2	Proprietà delle circonferenze	155
6.12.3	Posizioni reciproche di una retta e di una circonferenza	155
6.12.4	Posizioni reciproche di due circonferenze complanari	156
6.12.5	Poligoni inscritti e circoscritti	156
6.12.6	Poligoni regolari	156
6.12.7	Angoli alla circonferenza	157
6.12.8	Sezione e numero aureo	157
7	EQUIVALENZA DELLE SUPERFICI PIANE	159
7.1	Introduzione	159
7.1.1	Misura dell'area	161
7.2	Equivalenza dei parallelogrammi	161
7.3	Equivalenza dei triangoli	163
7.4	Equivalenza di altri poligoni	164
7.5	Teoremi di Euclide e Pitagora	165
7.6	Riassunto	167
8	CALCOLO DI LUNGHEZZE E AREE	169
8.1	Perimetri dei poligoni	169
8.2	Aree dei poligoni	171
8.2.1	Area del rettangolo e del quadrato	172
8.2.2	Area del triangolo	173
8.2.3	Area del rombo	174
8.2.4	Area del parallelogramma	175
8.2.5	Area del trapezio	175
8.3	Applicazioni dei teoremi di Pitagora e Euclide	179
8.3.1	Diagonale del rettangolo e del quadrato	181
8.3.2	Altezze del triangolo	182
8.3.3	Triangolo rettangolo isoscele	186
8.3.4	Triangolo con angoli 30, 60, 90 gradi	186
8.3.5	Lato di un rombo	187
8.3.6	Applicazioni sul trapezio	188
8.4	Lunghezza di circonferenza e archi	192
8.4.1	Misura lineare e angolare di un arco	194
8.4.2	Radiani	194
8.5	Area del cerchio	197
8.5.1	Area del settore circolare	198
8.5.2	Area della corona circolare	200
8.5.3	Area del segmento circolare	200
8.6	Area del poligono apotemato	202

8.6.1	Relazione fra il lato e l'apotema di un poligono regolare	204
8.7	Area di un poligono irregolare	207
8.8	Area di altre superfici piane	207
8.9	Circonferenze iscritte e circoscritte	208
8.10	Curiosità	217
8.10.1	Storia del teorema di Pitagora	217
8.10.2	La scoperta degli irrazionali	218
8.11	Riassunto	220
9	GEOMETRIA SOLIDA	223
9.1	Rette e piani nello spazio	223
9.1.1	Posizioni relative di due piani	225
9.1.2	Distanze	226
9.1.3	Angoli diedri	226
9.1.4	Piani perpendicolari	227
9.1.5	Angoloidi	228
9.2	Poliedri	228
9.3	Cubo	229
9.4	Estensione spaziale di un solido	229
9.4.1	Misura del volume	230
9.5	Volume e area della superficie di un cubo	230
9.6	Parallelepipedo	232
9.6.1	Parallelepipedo rettangolo	232
9.6.2	Parallelepipedo obliquo	233
9.7	Prisma	234
9.7.1	Area della superficie di un prisma retto	235
9.7.2	Volume di un prisma retto	235
9.8	Piramide	236
9.8.1	Tronco di piramide	239
9.9	Poliedri regolari	242
9.10	Cilindro	243
9.10.1	Area delle superfici	244
9.10.2	Volume	244
9.11	Cono	245
9.11.1	Tronco di cono	247
9.12	Sfera	250
9.12.1	Posizioni relative di un piano e di una sfera	250
9.12.2	Area della superficie	251
9.12.3	Volume	251
9.13	Parti della sfera	252
9.13.1	Segmento sferico ad una base	253
9.13.2	Segmento sferico a due basi	253
9.13.3	Calotta e zona sferica	253
9.13.4	Spicchio sferico	254
9.13.5	Fuso sferico	255
9.14	Angolo solido	256
9.15	Curiosità	257
	BIBLIOGRAFIA	259
	INDICE ANALITICO	261

PREFAZIONE

Matematica per Molti volume 2 completa il volume 1 per quanto riguarda gli argomenti di base, che, per avere un riferimento, sono quelli che si studiano fino al secondo anno delle scuole superiori (oggi dette scuole secondarie di secondo grado).

Come detto nella prefazione del volume 1, che consiglio sempre di rileggere, questo volume fino alle edizioni precedenti all'anno 2018 costituiva insieme al volume 1 un solo libro, proprio perché spesso l'algebra di base è studiata intrecciandola alla geometria di base, tuttavia ragioni di praticità mi hanno portato a dividere i volumi in due, dunque ciò che vale per tutta la collana (che deve essere pensata come un solo grande libro) vale a maggior ragione per i primi due volumi.

Nonostante si tratta di geometria di base gli argomenti sono tutt'altro che immediati infatti anche nei percorsi scolastici la parte di geometria spesso è quella più sacrificata. Per non appesantire troppo la trattazione ho evitato diverse dimostrazioni, soprattutto per la geometria solida. In parte gli argomenti saranno ripresi in maniera più rigorosa e generale nel volume 4.

Confesso che la scrittura di questo volume è stata quella più noiosa e forse anche più faticosa, forse anche perché nel mio percorso di studi non l'ho affrontata come si doveva, ad ogni modo mi sono sforzato di mettere insieme gli argomenti più interessanti, che sono comunque tanti, anche se diversi di essi, come le trasformazioni geometriche, sono affrontati solo marginalmente.

In questa edizione ho aggiunto qualche paragrafo di curiosità, che aiutano anche a capire meglio certi enunciati, e qualche altra piccola cosa, come al solito per il confronto tra le edizioni fare riferimento al sito matematicaxmolti.it; ad ogni modo, chi ha acquistato il volume 1 prima di settembre 2018 può tranquillamente evitare di acquistare questo, in quanto le modifiche e aggiunte sono marginali.

Settembre 2018

Ivan Gentile.

I. Gentile[©]

RINGRAZIAMENTI

Per i ringraziamenti ripeto volentieri quanto detto nel volume 1, quindi preferisco partire dalla mia professoressa di Analisi Matematica dell'Università, a cui devo una gran parte delle mie conoscenze matematiche. Il suo contributo sarà più evidente nei volumi successivi, in cui ci saranno gli argomenti che spiegava nei suoi corsi; tuttavia, i suoi insegnamenti sono in qualche modo presenti anche in questo libro, visto che ha profondamente formato e influenzato il mio approccio allo studio di qualunque disciplina. Probabilmente se avessi avuto un altro docente questo libro non sarebbe mai nato.

Un ringraziamento va anche agli autori dei testi presenti in bibliografia, in particolare al [5] da cui ho attinto molto per la stesura di questo volume.

Infine, ringrazio la comunità di \LaTeX sparsa nel mondo che mi ha permesso di scrivere il libro in formato digitale e in particolare il \GfT (Gruppo Utilizzatori Italiani di \TeX) che mi ha fornito un aiuto fondamentale all'organizzazione del layout del libro.

Settembre 2018

I. G.

I. Gentile ©

I. Gentile[©]

INTRODUZIONE

Il libro tratta la Geometria elementare, tali argomenti sono estremamente collegati a quelli di Algebra di base presenti nel volume 1, infatti nelle edizioni precedenti costituivano un solo volume.

Come detto nel volume 1, anche in questo si adottano diverse convenzioni che è utile specificare:

- Teoremi di dimostrazione non molto lunga, li ho indicati semplicemente come “proposizioni”.
- Le parentesi quadre nel testo indicano delle parole lette in alternativa a quelle immediatamente precedenti; ad esempio, scrivendo

L'unione [intersezione] di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.

si intende che valgono entrambe le seguenti affermazioni

- L'unione di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.
- L'intersezione di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.

In pratica è un modo per abbreviare le cose.

- Le soluzioni degli esercizi (laddove presenti) sono indicate tra parentesi quadre sul margine destro o sul margine sinistro in una riga in cui è presente solo la soluzione. Se volete indicazioni o soluzioni degli esercizi (mi rivolgo soprattutto ai docenti) contattatemi all'indirizzo info@matematicaxmolti.it.

In matematica si usano, per tradizione, molte lettere greche che mano mano è necessario imparare, alla fine di questa introduzione troverete una tabella che raccoglie i simboli e i relativi nomi.¹

La matematica è anche ricca di altri simboli che sono abbreviazioni di locuzioni, li vedremo mano mano che saranno introdotti; tuttavia, ho preferito raccogliarli nella seconda tabella alla fine di questa introduzione in modo da consultarla subito se dovesse capitare di ritrovare un simbolo di cui non si ricorda il significato. A tal proposito segnaliamo che la negazione dei simboli si ottiene, spesso, ponendo una linea in diagonale, ad esempio \neq significa “diverso”, mentre per gli insiemi numerici il pedice 0 indica che in esso è compreso anche lo zero (ad esempio \mathbb{N}_0), mentre gli apici + e – indicano, rispettivamente, solo i numeri positivi o negativi (ad esempio \mathbb{R}^+).

Infine, non vi scoraggiate dalla lunghezza del libro, perché, a mio avviso, molte dimostrazioni si possono saltare e molte altre solo leggere e poi se

¹ A scopo puramente informativo, l'ordine alfabeto delle lettere nella tabella è verticale, cioè α è la prima lettera dell'alfabeto, β la seconda, γ la terza e così via; inoltre alcune lettere mancano o manca la loro forma maiuscola in quanto non sono adoperate avendo un simbolo praticamente identico a quello di lettere del nostro alfabeto, ad esempio alpha maiuscola ha simbolo che praticamente coincide con la “A”.

siete a corto di tempo partite con leggere direttamente il riassunto del capitolo ed eventualmente approfondire qualche argomento meno chiaro o che proprio vi serve.

Buona matematica!

Lettere Greche.

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
α	alpha	ν	ni
β	beta	ξ	xi (minuscolo)
γ	gamma (minuscola)	Ξ	xi (maiuscolo)
Γ	gamma (maiuscola)	π	pi (greco minuscolo)
δ	delta (minuscola)	Φ	pi (greco maiuscolo)
Δ	delta (maiuscola)	ρ	rò
ϵ	epsilon	σ	sigma
ζ	zita	Σ	Sigma (maiuscolo)
η	eta	τ	tau
ϑ	theta (minuscola)	φ	phi (minuscolo)
Θ	theta (maiuscola)	Φ	phi (maiuscolo)
ι	iota	ψ	psi (minuscolo)
κ	kappa	Ψ	psi (maiuscolo)
λ	lambda (minuscola)	ω	omega (minuscolo)
Λ	lambda (maiuscola)	Ω	omega (maiuscolo)
μ	mu		

Simboli Matematici.

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
+	somma	−	sottrazione
·	prodotto	×	prodotto
/	divisione	÷	divisione
\sum	sommatoria	\prod	produttoria
$\sqrt{\quad}$	radice quadrata	$\sqrt[n]{\quad}$	radice n-esima
=	uguale	\approx	circa uguale
\triangleq	uguale per definizione		
<	minore	\leq	minore o uguale
>	maggiore	\geq	maggiore o uguale
\ll	molto minore	\gg	molto maggiore
	tale che	:	tale che, divisione
\equiv	equivale	\in	appartiene
\emptyset	insieme vuoto	∞	infinito
\exists	esiste	$!\exists$	esiste ed è unico
\cup	unione	\cap	intersezione
\setminus	differenza (tra insiemi)	\complement	complemento
\subset	incluso	\supset	include
\subseteq	incluso non strettamente	\supseteq	include non strettamente
\mathbb{N}	insieme dei naturali	\mathbb{Z}	insieme degli interi
\mathbb{P}	numeri pari	\mathbb{D}	numeri dispari
\mathbb{Q}	numeri razionali	\mathbb{R}	numeri reali
\mathbb{C}	numeri complessi	\mathbb{I}	numeri immaginari
\widehat{AB}	arco tra A e B	\widehat{ab}	angolo tra a e b
\longleftrightarrow	implicazione materiale	\longleftrightarrow	coimplicazione materiale
\implies	implica	\implies	implica
\iff	equivale, se e solo se	\iff	equivale, se e solo se
\forall	per ogni, qualunque	\neg	negazione
\vee	disgiunzione, or	\wedge	congiunzione, and
Re	parte reale	Im	parte immaginaria
$ x $	valore assoluto di x	$ \vec{v} $	modulo del vettore \vec{v}
\overline{AB}	misura del segmento AB		
\cong	congruente	\equiv	superfici equivalenti