1 GEOMETRIA RAZIONALE

In geometria elementare, per avere sequenzialità nell'esposizione, è necessario spesso mescolare argomenti diversi: per esempio, per enunciare alcuni teoremi sui triangoli bisogna conoscere prima alcuni teoremi sulle rette parallele tagliate da una trasversale ma a sua volta l'argomento "rette tagliate da una trasversale" richiede la conoscenza di altri teoremi sui triangoli. Insomma, per seguire ordinatamente tutte le dimostrazioni non è possibile parlare prima di tutto ciò che riguarda i triangoli, poi tutti i teoremi sulle rette parallele e perpendicolari e così via. Siccome l'impronta di questo libro è favorire la memorizzazione degli enunciati piuttosto che le loro dimostrazioni, ho preferito rinunciare alla sequenzialità accorpando in un unico capitolo tutti gli argomenti relativi a uno specifico oggetto geometrico. Troveremo quindi un capitolo sui concetti base della geometria, uno sui triangoli, uno su rette parallele e perpendicolari e così via. Questo naturalmente comporta che alcune dimostrazioni richiedono la conoscenza di teoremi presenti in pagine o capitoli successivi, ciò viene indicato con una nota a piè di pagina sullo specifico enunciato. Anche se forse mi farò nemico di molti professori di matematica "pura" il mio consiglio è saltare le dimostrazioni almeno quelle più lunghe; quando, poi, avrete dimestichezza con la matematica ne fate una lettura giusto per vedere come si ragiona, perché tanto le dimenticherete il giorno dopo.

Tuttavia, per completezza presentiamo l'ordine da seguire per la rigorosa sequenzialità degli argomenti, in modo cioè che ogni dimostrazione faccia uso solo di postulati e teoremi enunciati in precedenza.

1. I paragrafi da 1.2 a pagina 3 a 1.6 a pagina 9 escluso il teorema 1.1 a pagina 11.
2. I paragrafi da 1.7 a pagina 13 a 1.8 a pagina 14, escluso dal teorema 1.2 a pagina 15 alla fine del relativo sottoparagrafo.
3. I paragrafi da 1.9 a pagina 18 a 1.13 a pagina 30.
4. I paragrafi da 2.1 a pagina 41 a 2.2 a pagina 41.
5. Il paragrafo 2.3 a pagina 42 dall'inizio fino al teorema 2.2 a pagina 43 (compreso).
6. I teoremi del paragrafo 2.4.1 a pagina 45.
7. Il teorema 2.4 a pagina 44.
8. Il paragrafo 2.4.2 a pagina 47.
9. Il teorema 1.1 a pagina 11.
10. Dal teorema 1.2 a pagina 15 alla fine del relativo sottoparagrafo.
11. Il teorema 2.35 a pagina 64, il corollario 2.36 a pagina 64, il corollario 2.12 a pagina 49, corollario 2.13. In particoalre la dimostrazione di di questi ultimi due corollari cambia leggermente perché si basa sul teorema 2.35 e non sul teorema 2.10 che non è ancora enunciato. Per vedere la dimostrazione di tali corollari andare al paragrafo 2.10 a pagina 63.
12. Il paragrafo 1.14 a pagina 32.
13. Il paragrafo 2.6 a pagina 51 tranne i teoremi 2.20 a pagina 53 e 2.21 a pagina 54.
14. Dal paragrafo 3.1 a pagina 67 al paragrafo 3.6 a pagina 74.

15. Il paragrafo 2.5 a pagina 49 (in cui i corollari 2.12 e 2.13 a pagina 50 sono già stati visti in precedenza al punto 11).
16. I teoremi 2.20 a pagina 53 e 2.21 a pagina 54.
17. Il paragrafo 2.8 a pagina 58.
18. Il paragrafo 2.9 a pagina 62.
19. Il paragrafo 2.4.3 a pagina 47.
20. I paragrafi 3.7 a pagina 75, 3.8 a pagina 77.
21. Il paragrafo 1.15 a pagina 36.
22. Il capitolo 4 a pagina 81.
23. Il capitolo 5 a pagina 111.
24. Il paragrafo 2.7 a pagina 55.
25. I capitoli 6, 7, 8, 9.

1.1 QUALCHE CENNO STORICO

La *geometria* è quella branca delle matematica che si occupa di studiare le forme nello spazio e le loro relazioni. Le origini di questa disciplina si perdono nella storia, comunque possiamo dire che tutte le civiltà che riuscirono a realizzare costruzioni di una certa complessità possedevano una buona conoscenza della geometria di base, si pensi agli Assiri-Babilonesi, Sumeri, Cinesi, Indiani e soprattutto gli Egizi dove le maestose piramidi sono un esempio evidente delle loro conoscenze geometriche.

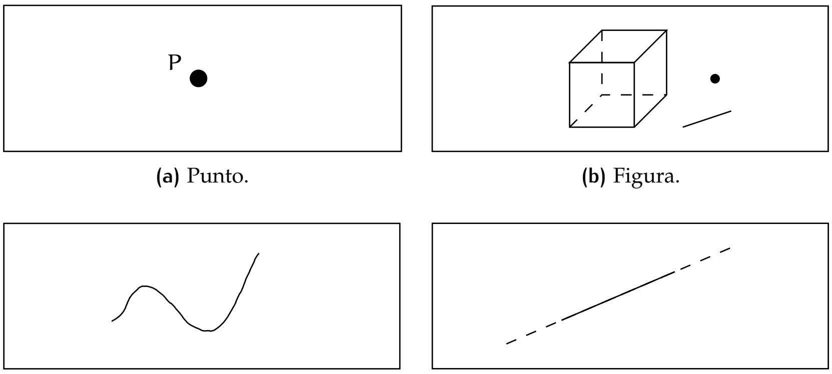
La parola *geometria* deriva dal greco antico e significa *misura della terra*, ciò testimonia il fatto che la geometria aveva scopi molto pratici: costruire edifici, misurare e delimitare territori, eccetera.

Grazie poi ai grandi filosofi greci la geometria inizio ad essere studiata indipendentemente dai problemi pratici, facendosi guidare dal solo *ragionamento*, nacque quindi la geometria come la conosciamo oggi, come ci viene presentata a scuola e nei libri (anche in questo), che prende il nome di *geometria razionale*. Si iniziarono a considerare le figure geometriche idealmente staccate dalle cose che esse rappresentavano e dalle operazioni per la loro misura. Si introdussero così, per astrazione, punti privi di dimensione, linee senza estensione e spessore, superfici senza spessore e così via.

Con la geometria razionale, la geometria viene allora inquadrata come una *teoria* (come la teoria degli numeri, la teoria degli insiemi, ...): si parte da concetti primitivi, si enunciano un numero minimo di verità (postulati o assiomi) "evidenti" che riguardano questi concetti, si danno eventualmente altre definizioni e poi si passa a enunciare altre verità questa volta tipicamente non evidenti (i teoremi) dimostrabili sulla base dei postulati.

A seconda dei postulati che si enunciano si hanno vari tipi di geometrie. La geometria più semplice, famosa e utilizzata è la *geometria euclidea* detta così perché si basa sui postulati forniti dallo studioso alessandrino Euclide. Prendendo altri postulati, in particolare negando il postulato delle parallele di Euclide, si hanno altre geometrie che noi non vedremo.

Tutta la parte di geometria razionale euclidea che vedremo nel corso del libro va anche sotto il nome di *geometria elementare* perché sono gli argomenti più semplici e di base, ma come vedrete talvolta proprio elementari non sono se non altro perché sono tantitssimi.



(a) Punto.

(b) Figura.

(c) Linea.

(d) Retta.

Figura 1.1: Concetti primitivi della geometria euclidea.

1.2 I CONCETTI PRIMITIVI

Probabilmente il primo esempio di concetto primitivo geometrico che viene in mente è lo *spazio*, che è l'ambiente in cui viviamo. Lo spazio viene pensato *continuo* (cioè senza interruzioni) e *illimitato* (cioè senza confini). Altri concetti primitivi sono, come vedremo, quelli di punto, retta e piano che costituiscono gli *enti geometrici fondamentali*.

In questo paragrafo daremo delle "esplicitazioni" sui concetti primitivi della geometria euclidea; non sono definizioni perché sono concetti primitivi ma servono per darci un'idea, che dovrebbe essere ovvia, del concetto.

In figura 1.1 ci sono degli esempi degli oggetti primitivi di cui parleremo adesso.

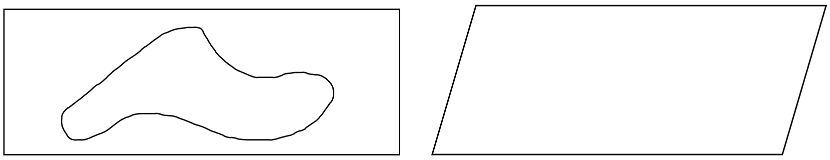
Punto. Si chiama *punto geometrico*, o semplicemente *punto*, un ente geometrico tale che le sue dimensioni sono trascurabili rispetto al sistema di riferimento preso in considerazione. È un'astrazione rappresentata da un piccolo segno che si fa con una penna su un foglio privo di qualsiasi estensione. In geometria i punti vengono designati con le lettere maiuscole dell'alfabeto: $A, B, C, \ldots$

Esempio 1.1. Se consideriamo una nave, rispetto alle dimensioni di un essere umano o del porto in cui essa è ancorata è un oggetto molto grande e quindi rispetto a questi riferimenti (uomo, porto) *non è* assimilabile a un punto. Ma se pensiamo a una nave come a un oggetto che si muove in un oceano e ne vogliamo dare una posizione (per esempio in termini di latitudine e longitudine) si può considerare come un punto (è così che viene fatto nella navigazione marittima) in quanto rispetto al sistema di riferimento preso in considerazione, l'oceano, le sue dimensioni sono trascurabili.

Figura. Si chiama *figura geometrica*, o semplicemente *figura* un insieme qualunque di punti.

Spazio. Si chiama *spazio*, l'insieme di tutti i possibili punti e può considerarsi, perciò, come la figura che contiene tutti i punti e quindi le figure.

Linea. Un insieme di punti posti uno accanto all'altro come quando si fa scorrere la punta di una matita su un foglio costituisce quella che si chiama *linea geometrica* o semplicemente *linea* o anche *curva*. La linea è quindi priva di qualsiasi spessore.



(a) Superficie. (b) Piano.

Figura 1.2: Superficie e piano.

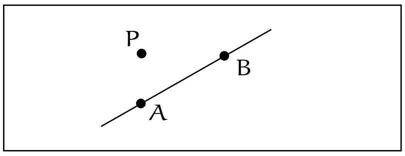


Figura 1.3: Segmento (AB) e punto esterno (P) ad esso.

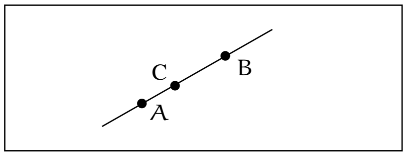


Figura 1.4: Punto interno a un segmento di retta.

Fra tutte le linee che si possono immaginare la più importante è la retta.

Retta. Si chiama *retta* un insieme infinito di punti *allineati* che non non ha né un origine né una fine.

Di una retta, non esistendo né l'origine né la fine, non esiste un punto che precede tutti gli altri, né un punto che segue tutti gli altri.

Come si vede dalla figura 1.1 per indicare che la retta non ha origine né fine, si tratteggiano gli estremi, anche se spesso per comodità di disegno gli estremi non saranno tratteggiati.[1]

Superficie. Tra i concetti primitivi c'è anche quello di *superficie* che si forma nella nostra mente considerando, per esempio, un velo comunque conformato, ma privo di spessore, vedi figura 1.2a. Così come ogni linea si può considerare generata da un punto mobile nello spazio, così ogni superficie può considerarsi generata da una linea che si muove.

Piano. Fra le varie superfici, la più importante è la *superficie piana*, che è nota più spesso con il nome di *piano*. L'idea di piano nasce in noi pensando a un foglio esteso indefinitamente in tutte le direzioni, vedi figura 1.2b.[2]

1.3 SEGMENTO E DISTANZA TRA DUE PUNTI

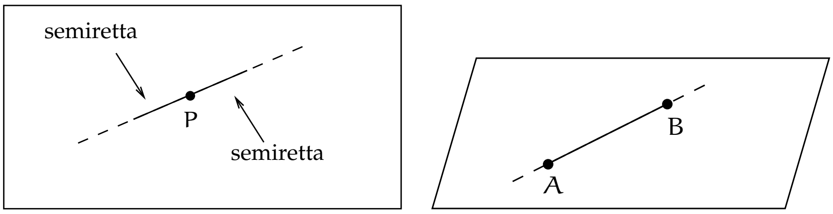
Avendo immaginato la retta come concetto primitivo, allora il segmento, che vedremo adesso, non è un un concetto primitivo ma una definizione che si basa sul concetto di retta.[3]

Definizione 1.1 (Segmento)**.** Si chiama *segmento* la parte di una retta compresa tra due suoi punti (vedi per esempio il segmento delimitato da A e B in figura 1.3) che prendono il nome di *estremi* del segmento. I punti di un

1 I matematici possono tenerci a questi "dettagli": si racconta che il famoso matematico Renato Caccioppoli bocciò un suo studente per non aver tratteggiato gli estremi della retta. Personalmente non ci tengo, basta capirsi, ma io non sono un matematico. . .

2 Come rappresentato in figura 1.2b spesso quando si vuole disegnare un piano si usa, per convenzione, disegnare in maniera obliqua i tratti verticali.

3 Si sarebbe potuto fare l'opposto, ovvero pensare il segmento come concetto primitivo e definire la retta come un segmento che non ha né origine né fine.



(a) Semirette di una retta.

(b) Per due punti distinti passa una sola retta.

Figura 1.5: Postulato fondamentale della retta.

segmento esclusi gli estremi si dicono *punti interni* (al segmento) e tutti gli altri, sempre esclusi gli estremi, si dicono *punti esterni* (al segmento).
Un segmento di solito si indica affiancando le lettere dei suoi estremi, ad esempio AB.

Proposizione 1.1. *Un qualsiasi punto* C *interno ad un segmento* AB *divide il segmento in due parti ciascuna delle quali è ancora un segmento* (figura 1.4).

Per poter estendere la ovvia affermazione fatta nella proposizione precedente anche al caso in cui il punto C coincida con A oppure con B si effettua la seguente definizione.

Definizione 1.2 (Segmento nullo)**.** Il *segmento nullo* è un segmento i cui estremi coincidono.

Con riferimento alla figura 1.4 se C, per esempio, coincide con A, esso divide il segmento AB in due parti: una parte è lo stesso segmento AB e l'altra è il segmento nullo.

Definizione 1.3 (Distanza tra due punti)**.** Si chiama *distanza tra due punti* A e B, il segmento che li unisce.

Osservazione 1.1. Spesso si tende a chiamare "distanza tra due punti" anche la *misura* del segmento che unisce i due punti.

1.4 POSTULATI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA

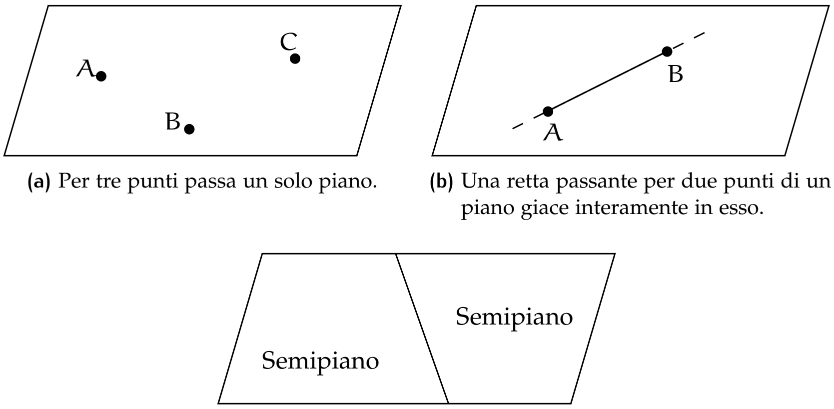
Postulato 1.1 (fondamentale della retta)**.** *La retta ha le seguenti proprietà che la caratterizzano e che costituiscono il* postulato fondamentale della retta*:*

a. Ogni punto P di una retta la divide in due parti, *ciascuna delle quali si chiama* raggio *o* semiretta*; il punto* P *si dice* origine *delle due semirette. Ciascuna delle due semirette è il prolungamento dell'altra.* Vedi figura 1.5a.

b. Per due punti dello spazio passa sempre una retta e una soltanto*. Ne segue che se due rette hanno due punti in comune, esse coincidono.*

Osservazione 1.2 (Importante)**.** In base al punto b del postulato fondamentale della retta si ha, ovviamente, che due rette *distinte* o non hanno alcun punto in comune o ne hanno uno soltanto, che in tal caso si dice *punto di intersezione* o *punto d'incontro* delle due rette.

Un punto di una retta si dice che *appartiene* alla retta o che *giace* sulla retta. Usando la notazione insiemistica, nel caso di figura 1.3 indicando con r la retta che passa per A e B, possiamo dire che $A \in r$, $B \in r$, $P \notin r$.



(a) Per tre punti passa un solo piano.

(b) Una retta passante per due punti di un piano giace interamente in esso.

(c) Semipiano.

Figura 1.6: Postulato fondamentale del piano.

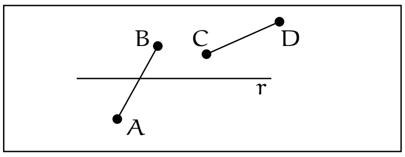


Figura 1.7: Segmenti tra il contorno di un semipiano.

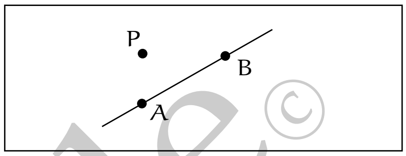


Figura 1.8: Per una retta e un punto passa un piano solo.

Osservazione 1.3. Le rette, di solito, si indicano con le lettere minuscole come a, b, c, . . . , oppure col nome di due loro punti (visto che due punti individuano la retta): la retta individuata dai punti A e B si chiama "retta AB".

Postulato 1.2 (fondamentale del piano)**.** *Il piano ha le seguenti proprietà che lo caratterizzano e che costituiscono il* postulato fondamentale del piano*:*

1. Pre tre punti dello spazio, non allineati, passa sempre un piano e uno solo; vedi figura 1.6a.[4]
2. Una retta passante per due punti di un piano giace interamente nel piano stesso; vedi figura 1.6b.
3. Una retta giacente in un piano, lo divide in due regioni, ciascuna delle quali si chiama *semipiano*; vedi figura 1.6c.

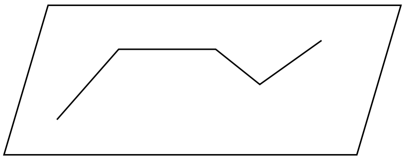
Definizione 1.4 (Contorno di un semipiano)**.** La retta che limita un semipiano si chiama *origine* o *contorno* del semipiano.

Osservazione 1.4. Il segmento che ha per estremi due punti C e D di uno stesso semipiano non incontra la retta r che determina il semipiano, mentre il segmento avente per estremi due punti A, B situati in semipiani diversi incontra la retta r in un punto (figura 1.7).

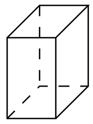
Dal postulato fondamentale del piano è ovvio che:

Proposizione 1.2. *Per una retta e un punto fuori di essa passa un piano e uno solo.* Vedi figura 1.8.

4 Due dei tre punti possono essere allineati ma non tutti e tre.

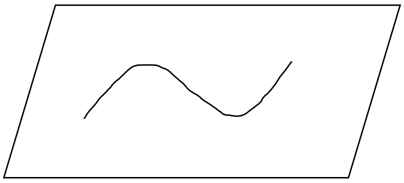


(a) Piana.

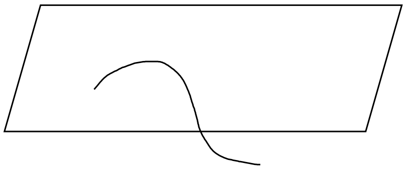


(b) Solida.

Figura 1.9: Figura piana e figura solida.



(a) Piana.



(b) Sghemba.

Figura 1.10: Curva piana e curva sghemba.

1.5 FIGURE E CURVE

Definizione 1.5 (Figure piane e solide)**.** Una figura i cui punti appartengono tutti ad un piano si dice *figura piana*, in caso contrario la figura è detta *figura solida*. Vedi figura 1.9.

Osservazione 1.5. Quando si disegna una figura solida (quindi si rappresenta in uno spazio bidimensionale un oggetto che è tridimensionale) le parti che non sono visibili rispetto al punto di vista da cui si osserva si è soliti disegnarle con linea tratteggiata come in figura 1.9b.

Definizione 1.6 (Curva piana e sghemba)**.** Una curva i cui punti appartengono tutti a un piano si dice *curva piana*, in caso contrario si dice *curva sghemba*. Vedi figura 1.10.

Definizione 1.7 (Arco di curva)**.** Il tratto di curva compreso tra due suoi punti A e B si chiama *arco di curva*, di cui i punti A e B si chiamano *estremi*. Vedi figura 1.11

Definizione 1.8 (Curva chiusa e aperta)**.** Una curva si dice *chiusa* se, partendo da uno qualunque dei suoi punti e percorrendo tutta la linea sempre nello stesso senso, si può tornare al punto di partenza. Una linea non chiusa si dice *aperta*. Vedi figura 1.12.

Definizione 1.9 (Curva semplice e intrecciata)**.** Una curva si dice *semplice* o *non intrecciata* se non interseca mai se stessa, cioè un punto che percorra la linea sempre nello stesso senso non ripassa mai per la stessa posizione. Viceversa si dice *intrecciata*. Vedi figura 1.13.

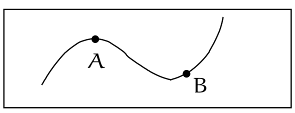
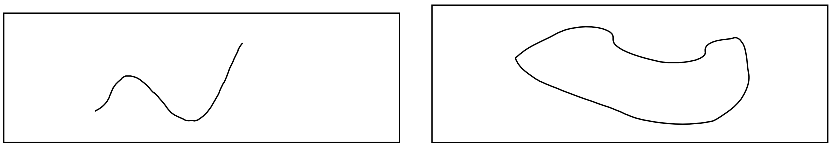
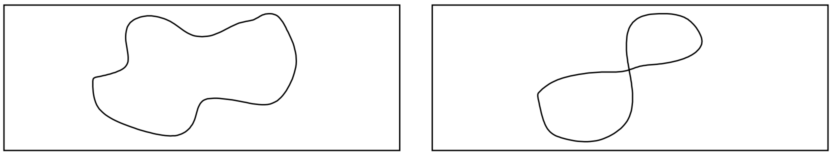


Figura 1.11: Arco di curva.



(a) Aperta. (b) Chiusa.

Figura 1.12: Curva chiusa e curva aperta.



(a) Semplice. (b) Intrecciata.

Figura 1.13: Curva semplice e curva intrecciata.

Intuitivamente ovvie sono le due seguenti Proposizioni:

Proposizione 1.3. *Ogni linea chiusa semplice si può percorrere in due versi l'uno l'opposto dell'altro.* Vedi figura 1.14.

Proposizione 1.4. *Una linea piana chiusa e semplice divide il piano in due regioni, una limitata e l'altra illimitata.* Vedi figura 1.15.

Definizione 1.10. Tutti i punti della regione limitata da una linea piana semplice chiusa si dicono *interni*; gli altri, esclusi i punti della linea stessa, sono detti *punti esterni*.
L'insieme dei punti di una curva piana chiusa semplice e dei punti interni costituisce una figura di cui la linea si dice il *contorno*. Vedi figura 1.16.

Osservazione 1.6. Nel postulato fondamentale del piano si afferma che in un piano il segmento, che unisce due punti A e B situati da bande opposte di una retta r, interseca questa retta in un punto. È intuitivo che un'analoga proprietà spetta non solo ai segmenti, ma anche ad ogni altro arco di linea piana che unisca A con B, come si vede dalla figura 1.17.

Osservazione 1.7. È intuitivo che se in un piano è tracciata una linea chiusa semplice, quando si voglia passare da un punto interno a uno esterno percorrendo un segmento di retta o un arco di linea qualunque, si deve necessariamente a un certo momento attraversare la linea, come si vede dalla figura 1.18.

Definizione 1.11 (Figura convessa e concava)**.** La figura costituita da una curva piana, chiusa, semplice e dai sui punti interni si dice *convessa* se considerando il segmento che unisce due punti qualunque del contorno questo

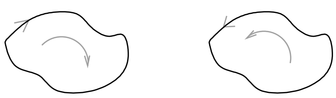


Figura 1.14: Versi di percorrenza di una curva chiusa semplice (a sinistra *orario* a destra *antiorario*).

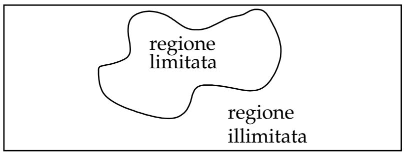


Figura 1.15: Regioni del piano individuate da una curva piana chiusa e semplice.

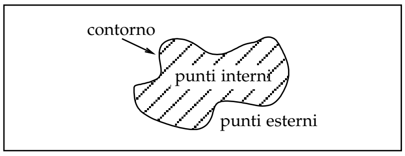


Figura 1.16: Punti interni ed esterni a una curva chiusa.

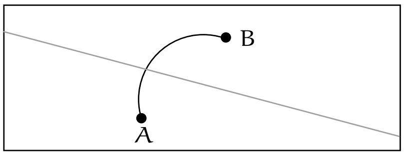


Figura 1.17: Retta intersecata da una curva con estremi a bande opposte.

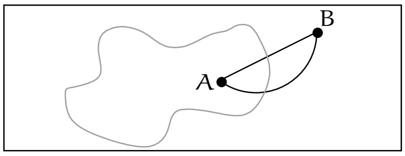


Figura 1.18: Passaggio da un punto interno a uno esterno di una curva semplice chiusa.

è tutto interno alla interno alla figura (figura 1.19a).[5] Viceversa, se esiste un segmento che congiunge due punti del contorno e non è tutto interno alla figura, la figura si dice *concava* (figura 1.19b).[6]

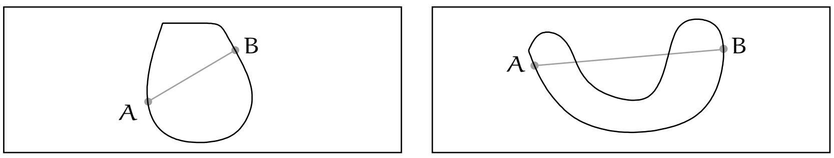
1.6 ANGOLO PIANO

In tale paragrafo parleremo di angolo piano e tutte le definizioni connesse. Nel paragrafo 9.14 a pagina 256 parleremo invece di angolo solido.

Definizione 1.12 (Angolo piano)**.** L'*angolo piano*, o semplicemente *angolo*, è una parte di piano limitata da due semirette aventi la stessa origine. Come si osserva dalla figura 1.20 due semirette a e b uscenti da uno stesso punto O, dividono il piano in due parti e quindi definiscono due angoli. Le semirette si dicono *lati* e l'origine comune si chiama *vertice* dell'angolo. Fissato uno dei due angoli, i punti di un'angolo che non appartengono ai lati si dicono *interni*; tutti gli altri, sempre esclusi quelli dei lati, si dicono *esterni*.

Definizione 1.13 (Angolo convesso e concavo)**.** Dei due angoli formati da due generiche semirette a e b aventi la stessa origine O si dice *convesso*

5 Equivalentemente la figura si dice convessa se ogni retta passante per un qualsiasi interno interseca il contorno in due soli punti.
6 Equivalentemente la figura si dice concava se esiste qualche retta che passando per un punto interno interseca il contorno in più di due punti.



(a) Convessa. (b) Concava.

Figura 1.19: Figura convessa e figura concava.

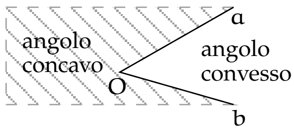


Figura 1.20: Angolo convesso e angolo concavo.

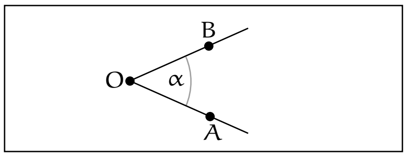
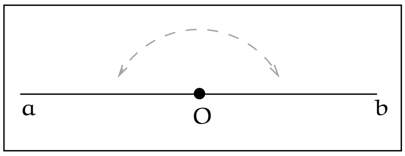
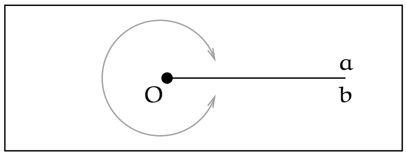


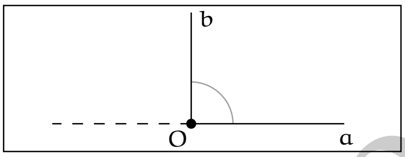
Figura 1.21: Modi di indicare un angolo.



(a) Piatto.



(b) Giro.



(c) Retto.

Figura 1.22: Angolo piatto, angolo giro, retto.

quello che non contiene i prolungamenti dei lati e si dice *concavo* quello che contiene i prolungamenti dei lati. Vedi figura 1.20.

Osservazione 1.8. Quando si parla di angolo individuato da due semirette (di stessa origine), salvo esplicito avviso contrario, si intende sempre l'angolo *convesso*.

Un angolo si indica in vari modi:

- Col nome dei suoi lati, ad esempio quando si dice "“l'angolo ab”" si intende parlare dell'angolo convesso formato dalle semirette a e b, si indica con $\widehat{ab}$.
- Col simbolo $A\hat{O}B$ dove O è il vertice ed A e B due punti qualsiasi appartenenti ciascuno ad un lato e distinti da O (figura 1.21). Quando dal contesto è chiaro quali sono i lati, un angolo si può anche indicare solo col vertice, ad esempio: $\hat{O}$.
- Con una lettera greca, come per esempio α, β, eccetera, magari accompagnata dal disegno un arco che congiunge le semirette (figura 1.21).

Definizione 1.14 (Angolo giro, piatto, nullo)**.** Due semirette opposte (cioè che sono l'una il prolungamento dell'altra) determinano due angoli, ciascuno dei quali si chiama *angolo piatto* (figura 1.22a). L'angolo giro è l'unione di due angoli piatti cioè l'angolo dato quando i due lati sono sovrapposti (figura 1.22b). L'altro angolo determinato da un angolo giro è ovviamente detto *angolo nullo*.

Definizione 1.15 (Angolo retto)**.** Si chiama *angolo retto* la metà di un angolo piatto (figura 1.22c).[7]

---

7 Per ora accettiamo il concetto di “metà” come intuitivo, nel paragrafo 1.10 vedremo come confrontare quantitativamente due angoli.

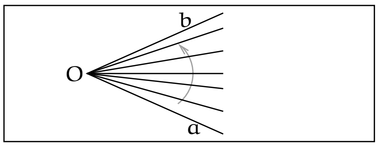


Figura 1.23: Semirette interne ad un angolo.

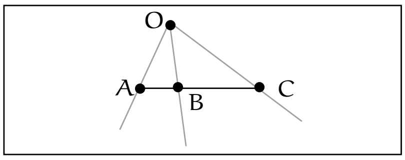


Figura 1.24: Corda di un angolo.

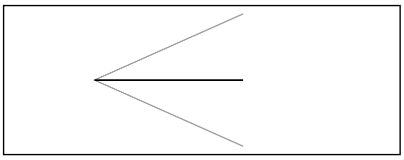


Figura 1.25: Bisettrice di un angolo.

Definizione 1.16 (Semirette interne ad un angolo)**.** Le semirette aventi l'origine nel vertice di un angolo e contenenti un suo punto interno hanno tutti gli altri punti interni, per questo si dicono *semirette interne* o anche *appartenenti* all'angolo. Vedi figura 1.23.

Osservazione 1.9. Un angolo si considera spesso come l'insieme delle semirette uscenti dal vertice e comprese fra i lati (figura 1.23). Ciò equivale a pensare l'angolo come generato dalla rotazione in un piano, di uno dei due lati intorno all'origine. Nel caso di figura 1.23 si può pensare l'angolo come generato dalla rotazione in senso antiorario di a fino a sovrapporsi a b o di b in senso orario fino a sovrapporsi ad a; nel caso in cui interessa specificare il verso della rotazione (cioè se orario o antiorario) lo si specifica dal verso di una freccia come, per esempio, in figura 1.23 la freccia in grigio indica che la rotazione è antioraria da a verso b.

Definizione 1.17 (Corda di un'angolo)**.** In un angolo convesso è evidente che un segmento avente gli estremi sui lati (distinti dall'origine) appartiene tutto all'angolo (segmento AC in figura 1.24). Un tale segmento si dice *corda dell'angolo*.

Osservazione 1.10. È intuitivo che una semiretta interna ad un angolo convesso interseca una sua corda in un punto e in punto soltanto (il punto B in figura 1.24); viceversa, una semiretta con l'origine nel vertice e passante per un punto di una corda appartiene all'angolo.

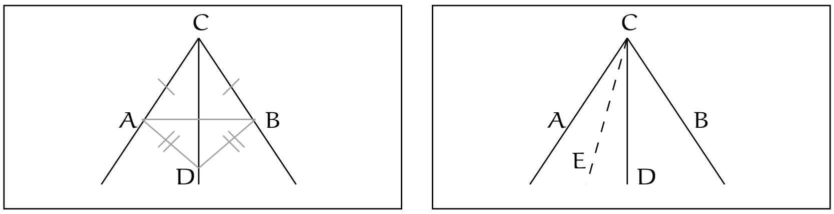
Definizione 1.18 (Bisettrice di un'angolo)**.** Si chiama *bisettrice* di un angolo la semiretta che divide l'angolo in due parti congruenti, vedi figura 1.25.[8]

Teorema 1.1 ([9])**.** *Esiste sempre una semiretta e una sola che divide un angolo qualunque in due parti congruenti.*

Dimostrazione. Consideriamo l'angolo convesso $A\hat{C}B$ (figura 1.26a) e sui lati, a partire dal vertice prendiamo due segmenti CA, CB congruenti fra loro, indi congiungiamo A con B: il triangolo ABC risulta isoscele per costruzione. Costruiamo ora sopra AB, da banda opposta rispetto a C, un altro triangolo

8 Per ora prendiamo la parola "congruenza" come sinonimo di "uguaglianza" e per quest'ultima affidiamoci all'intuizione; per una definizione più rigorosa di congruenza, vedere paragrafo 1.7.

9 Richiede le definizioni di congruenza del paragrafo 1.7 a pagina 13, i criteri di congruenza sui triangoli, del paragrafo 2.3 a pagina 42, le definizioni di confronto tra angoli del paragrafo 1.10 a pagina 18.



(a) Esistenza. (b) Unicità.

Figura 1.26: Dimostrazione che una bisettrice di un angolo esiste ed è unica.

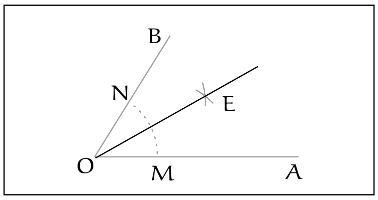


Figura 1.27: Costruzione della bisettrice di un angolo.

isoscele ABD, avente per base AB e congiungiamo C con D. I due triangoli CAD, CBD hanno i lati rispettivamente congruenti, infatti essi hanno: CD in comune, $AC \cong BC$ per costruzione, $AD \cong BD$ avendo costruito isoscele il triangolo ABD; allora per il terzo criterio di congruenza (teorema 2.4 a pagina 44), essi sono congruenti e si può dedurre così che $A\hat{C}D \cong B\hat{C}D$ (perché opposti, rispettivamente, ai lati congruenti AD e BD, vedi osservazione 2.2 a pagina 43). Ciò equivale a dire che la semiretta CD divide per metà l'angolo $A\hat{C}B$ e risulta quindi dimostrata l'esistenza di una tale semiretta.

Dobbiamo ora dimostrare l'unicità, faremo a tale scopo vedere che non vi può essere un'altra semiretta uscente dal vertice C che goda della stessa proprietà. Conduciamo, infatti, (figura 1.26b) una qualsiasi altra semiretta CE, appartenente, per esempio, all'angolo $A\hat{C}D$; risulta in tal caso, dall'esame della figura 1.26b:

$$A\hat{C}E < A\hat{C}D \text{ e } B\hat{C}D < B\hat{C}E$$

e poiché i due angoli $A\hat{C}D$ e $B\hat{C}D$ sono congruenti, potrà scriversi:

$$A\hat{C}E < A\hat{C}D \cong B\hat{C}D < B\hat{C}E$$

e cioè, a maggior ragione, $A\hat{C}E < B\hat{C}E$, resta pertanto dimostrato che la semiretta CE non può dividere per metà l'angolo $A\hat{C}B$. □

Definizione 1.19 (Retta bisettrice di un angolo)**.** Si chiama *retta bisettrice* di un angolo la retta che contiene la semiretta bisettrice e anche la semiretta opposta, che è bisettrice del secondo angolo avente gli stessi lati del primo.

Se sapete una circonferenza e come si adopera un compasso potete subito leggervi le seguenti istruzioni su come tracciare una bisettrice, altrimenti ritornateci dopo aver letto il paragrafo 6.11 a pagina 149. Per tracciare la bisettrice di un angolo $A\hat{O}B$ si deve (figura 1.27) disegnare un arco con centro O e raggio arbitrario che sechi i lati degli dell'angolo in due punti M e N; a questo punto con raggio maggiore o uguale a quello dell'arco precedentemente disegnato di descrivono due piccoli archi con centri rispettivamente in M e N; questi due archi si intersecano in un punto E: la semiretta OE è la bisettrice richiesta.

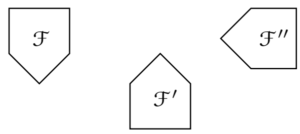


Figura 1.28: Congruenza tra figure.

1.7 CONGRUENZA TRA FIGURE

Definizione 1.20 (Congruenza tra figure)**.** Due figure distinte nello spazio si dicono *congruenti* se si possono pensare come posizioni diverse di una stessa figura in movimento senza deformazione (cioè in movimento rigido) (figura 1.28). Ne segue che due figure sono congruenti, se si possono sovrapporre l'una all'altra mediante un opportuno movimento (rigido). La congruenza tra due figure $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ si esprime scrivendo: $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$.

Osservazione 1.11. In geometria si usa la parola "“congruenza”" in luogo di "“uguaglianza”" perché c'è una sottile differenza tra le due in quanto due figure dello spazio che sono la stessa figura ma posta in posizione diversa, non si può, a rigore, dire che sono uguali nel senso che i punti che costituiscono la prima figura non sono gli stessi di quelli che costituiscono il secondo insieme di punti. Ecco allora che la parola *uguaglianza* si usa solo per indicare due figure di stessa forma e che occupano la stessa posizione dello spazio (in pratica sono sovrapposte). Comunque spesso nella pratica la parola "“uguaglianza”" è usata in luogo di "“congruenza”", ma noi, per rigore, almeno in questo capitolo faremo la distinzione tra le parole.

Osservazione 1.12. Il simbolo di congruenza ($\cong$) è a volte adoperato come simbolo di “circa uguale” tra due numeri, anche se ad essere rigorosi quest'ultimo è $\simeq$. Come al solito attenzione al contesto.

È ovvio che la congruenza tra figure geometriche gode delle seguenti proprietà:

A. *Proprietà riflessiva*: ogni figura è congruente a se stessa, cioè $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$.

B. *Proprietà simmetrica*: se una figura $\mathcal{F}$ è congruente a una figura $\mathcal{F}'$ anche $\mathcal{F}'$ è congruente ad $\mathcal{F}$, in simboli

$$\mathcal{F} \cong \mathcal{F}' \implies \mathcal{F}' \cong \mathcal{F}.$$

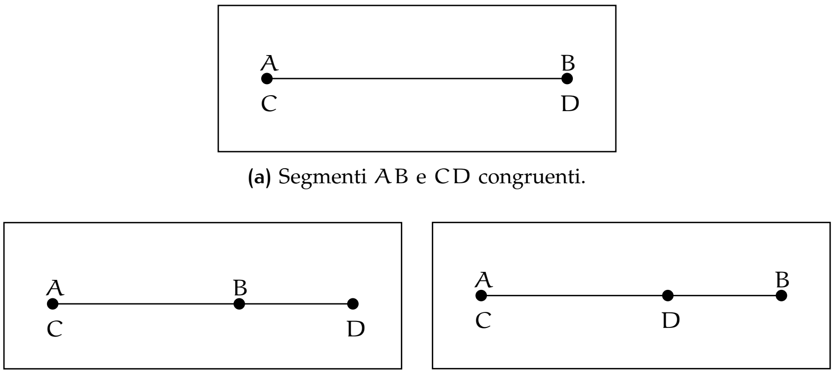
C. *Proprietà transitiva*: se una figura $\mathcal{F}$ è congruente a una figura $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}'$ è congruente a una figura $\mathcal{F}''$, anche $\mathcal{F}$ è congruente ad $\mathcal{F}''$; in simboli

$$\mathcal{F} \cong \mathcal{F}' \text{ e } \mathcal{F}' \cong \mathcal{F}'' \implies \mathcal{F} \cong \mathcal{F}''.$$

La relazione di congruenza, visto che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, si dice essere una *relazione di equivalenza* (ne parleremo in generale nel volume 3).

Definizione 1.21 (Punti omologhi)**.** Date due figure $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ congruenti, detti A e A' due punti, rispettivamente, di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ questi si dicono *omologhi* o *corrispondenti* se sovrapponendo le due figure $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ i punti A e A' vengono a coincidere.

Sono intuitivamente ovvie le seguenti proposizioni che quindi ammettiamo come altrettanti postulati.



(a) Segmenti AB e CD congruenti.

(b) Segmento AB minore di CD.

(c) Segmento AB maggiore di CD.

Figura 1.29: Confronto tra segmenti.

Postulato 1.3. *Tutte le rette sono congruenti fra loro.*

Postulato 1.4. *Tutte le semirette sono congruenti fra loro.*

Postulato 1.5. *Tutti i piani sono congruenti fra loro.*

Postulato 1.6. *Tutti i semipiani sono congruenti fra loro.*

Postulato 1.7. *Tutti gli angoli piatti sono congruenti fra loro.*

È ovvio che siccome tutti gli angoli piatti sono congruenti fra loro, anche gli angoli retti sono congruenti fra loro.

Osservazione 1.13. Nel seguito del capitolo spesso si farà riferimento alle figure piane, anche se molte definizioni e proprietà valgono anche al caso di figure nello spazio. Il compito di stabilire cosa si può estendere anche alle figure dello spazio lo lascio (volentieri) a voi.

1.8 CONFRONTO E OPERAZIONI SUI SEGMENTI

Postulato 1.8 (del trasporto dei segmenti)**.** *Data una semiretta di origine* O *ed un segmento* a*, esiste sulla semiretta un segmento e uno solo di origine* O *congruente ad* a*.*

Come ovvia conseguenza di tale postulato si ha che:

Proposizione 1.5. *Sopra ogni retta esistono due segmenti e due soltanto congruenti ad* a *ed aventi per origine un punto* O *qualunque della retta.*

Affermare che esistono questi segmenti equivale ad affermare che è possibile costruirli effettivamente, non importa con quale strumento: è dunque possibile *trasportare* un segmento da una parte all'altra dello spazio.

Definizione 1.22 (Confronto tra segmenti)**.** Dati due segmenti AB, CD si immagini di spostare uno dei segmenti in modo da far in modo che i punti A e C coincidano ($A \equiv C$) e gli altri due punti (B e D) cadano dalla stessa parte rispetto ai punti sovrapposti $A \equiv C$. A questo punto si può avere uno dei seguenti tre casi:

- I punti B e D vengono a coincidere (figura 1.29a): in questo caso vuol dire, come sappiamo, che i due segmenti sono *congruenti*.

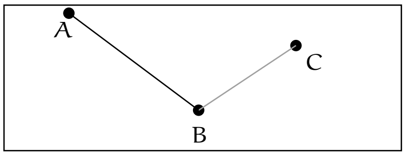


Figura 1.30: Segmenti consecutivi.

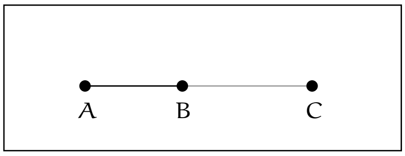
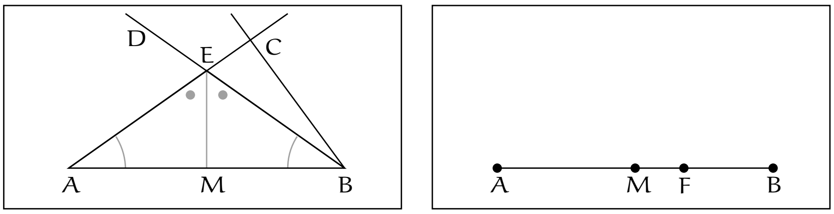


Figura 1.31: Segmenti adiacenti.



(a) Esistenza. **(b)** Unicità.

Figura 1.32: Dimostrazione che il punto medio di un segmento esiste ed è unico.

- Il punto B viene a cadere tra i punti C e D (figura 1.29b): in questo caso si dice, che AB è *minore* di CD e si scrive $AB < CD$.
- Il punto D viene a cadere tra i punti A e B (figura 1.29c): in questo caso si dice, che AB è *maggiore* di CD e si scrive $AB > CD$.

Postulato 1.9 (della invertibilità dei segmenti)**.** *Un segmento può essere sovrapposto a se stesso in modo che si scambino gli estremi, ossia il segmento* AB *può sovrapporsi al segmento* BA *e, pertanto, risulta* $AB \cong BA$.

Definizione 1.23 (Segmenti consecutivi)**.** Due segmenti si dicono *consecutivi* se hanno in comune solo un estremo (in figura 1.30 i segmenti AB e BC sono consecutivi).

Definizione 1.24 (Segmenti adiacenti)**.** Due segmenti si dicono *adiacenti* se sono consecutivi e situati sulla stessa retta (in figura 1.31 i segmenti AB e BC sono adiacenti).

Teorema 1.2 ([10])**.** *In un segmento qualunque esiste sempre un punto e uno solo che divide il segmento in due parti congruenti.*

Dimostrazione. Sia AB il segmento dato: si uniscano gli estremi A e B con un punto C non appartenete alla retta AB. Supposto che i due angoli $C\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ non siano congruenti e che sia, per esempio, $C\hat{A}B < C\hat{B}A$ (figura 1.32a), possiamo condurre da B una semiretta BD, dalla parte di C rispetto ad AB, tale che l'angolo $A\hat{B}D$ risulti congruente a $B\hat{A}C$. Questa semiretta incontrerà il segmento AC in punto E e il triangolo ABE, avendo $B\hat{A}E \cong A\hat{B}E$, risulterà (per il teorema 2.6 a pagina 46) isoscele rispetto alla base AB.
Conduciamo ora la bisettrice dell'angolo $A\hat{E}B$ e indichiamo con M il punto in cui essa incontra il lato AB: dimostreremo che il punto M divide AB in due parti congruenti. Infatti, si considerino i due triangoli AEM, BEM che hanno:

- il lato EM in comune;

10 Richiede le definizioni di confronto tra angoli del paragrafo 1.10, i criteri di congruenza sui triangoli, del paragrafo 2.3 a pagina 42.

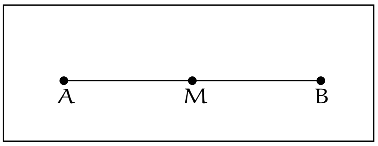


Figura 1.33: Punto medio di un segmento.

- $A\hat{E}M \cong M\hat{E}B$ per costruzione;
- $AE \cong EB$ dato che il triangolo ABE è isoscele.

Quindi, per il primo criterio di congruenza (teorema 2.1), i due triangoli AEM, BEM sono congruenti e, da tale congruenza, si può dedurre che è $MA \cong MB$.

Nessun altro punto del segmento AB può dividerlo in due parti congruenti. Infatti, se F è un altro punto qualunque del segmento AB, compreso, ad esempio, fra M e B, dalla figura 1.32b si può concludere che $AF > AM$, ed essendo $AM \cong MB$ segue che $MB > FB$ e perciò a maggior ragione $AF > FB$, ossia i due segmenti AF e FB non possono mai essere congruenti. □

Definizione 1.25 (Punto medio di un segmento)**.** Il punto M che divide un segmento AB in due segmenti congruenti si chiama *punto medio del segmento*. In figura 1.33 il punto M è il punto medio del segmento AB.

Osservazione 1.14. Col teorema 1.2 abbiamo quindi dimostrato che il punto medio di un segmento per ogni segmento esiste sempre ed è unico.

Definizione 1.26 (Punti simmetrici rispetto a un punto)**.** Due punti A e B si dicono *simmetrici* rispetto ad un punto M, quando M è il punto medio del segmento AB che li unisce.

1.8.1 Operazioni con i segmenti

Definizione 1.27 (Somma tra segmenti)**.** Si chiama *somma* tra due segmenti adiacenti il segmento che ha per estremi gli estremi non comuni dei segmenti dati. Quindi dati due segmenti adiacenti AB e BC la loro somma è il segmento AC e si scrive: $AC \cong AB + BC$. Analogamente si definisce la somma di più segmenti adiacenti (in cui cioè il primo è adiacente al secondo, il secondo con il terzo è così via), come il segmento che ha come primo estremo quello del primo segmento e come secondo estremo quello dell'ultimo segmento, per esempio nel caso di 4 segmenti adiacenti AB, BC, CD, DE:

$$AB + BC + CD + DE \cong AE$$

La somma di due o più segmenti gode delle seguenti ovvie proprietà:

- *Proprietà commutativa*: la somma di due o più segmenti è indipendente dall'ordine degli addendi. In simboli, nel caso di due segmenti a e b:

  $$a + b \cong b + a$$

- *Proprietà associativa*: la somma di più segmenti non muta se a più addendi si sostituisce la loro somma. In simboli, nel caso di tre segmenti a, b, c:

  $$(a + b) + c \cong a + (b + c)$$

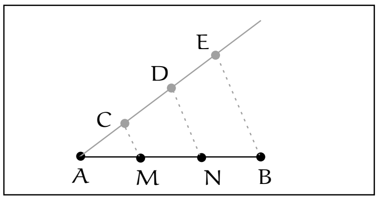


Figura 1.34: Divisione di un segmento in parti congruenti.

- Somme di segmenti ordinatamente congruenti sono congruenti: cioè indicando con a e c due segmenti congruenti tra loro, $a \cong c$, e con b e d altri due segmenti congruenti tra loro, $b \cong d$, si può scrivere

  $$a + b \cong c + d$$

Definizione 1.28 (Differenza tra segmenti)**.** Dati due segmenti a e b con il primo congruente o maggiore del secondo, si chiama *differenza* tra a e b il segmento, c, che sommato al secondo ci da un segmento congruente al primo, cioè tale che: $a \cong c + b$. La differenza tra a e b si indica con $a - b$.

È immediato riconoscere che

Proposizione 1.6. *Differenze di segmenti ordinatamente congruenti sono congruenti.* Cioè dato un segmento a congruente con un segmento c e un segmento b congruente con un segmento d, si può scrivere, se $a \geqslant b$:

$$a - b \cong c - d$$

Definizione 1.29 (Moltiplicazione di un segmento per un numero naturale)**.** *Moltiplicare* un segmento per un numero naturale significa costruire il segmento somma di tanti segmenti uguali al dato, quante sono le unità del numero naturale. La somma di n segmenti congruenti a un segmento dato a si dice *multiplo* di a *secondo il numero* n e si indica con $n \cdot a$ o con na.
I successivi multipli di a si dicono: *doppio* ($2a$), *triplo* ($3a$), *quadruplo* ($4a$), eccetera, di a.

Definizione 1.30 (Divisione di un segmento per un numero naturale)**.** *Dividere* un segmento a per un numero naturale n significa costruire il segmento che moltiplicato per il numero naturale n ci dà a. Il segmento risultato della divisione si dice *sottomultiplo* di a *secondo il numero* n e si indica con $\frac{a}{n}$ (oppure con a/n, oppure con $\frac{1}{n}a$).
I successivi sottomultipli di a si dicono: la *metà* ($a/2$), la *terza parte* ($a/3$), la *quarta parte* ($a/2$), eccetera, di a.

Osservazione 1.15. Nella pratica il problema di dividere un segmento in un numero $n \in \mathbb{N}$ di parti si può risolvere con la costruzione geometrica in figura 1.34.[11] Supponiamo di voler dividere il segmento AB in 3 parti uguali, per l'estremo A del segmento AB conduciamo una semiretta arbitraria r e su questa determiniamo i punti C, D, E in modo che i segmenti AC, CD, DE siano congruenti fra loro. Uniamo il punto E con l'estremo B del segmento e per i punti C e D conduciamo i segmenti CM e DN paralleli al segmento EB. I punti M e N dividono il segmento AB in 3 parti congruenti (la dimostrazione rigorosa di ciò è un'immediata conseguenza del teorema 3.13 a pagina 78).

11 A rigore, per comprendere il procedimento che stiamo per vedere bisogna sapere cosa si intende per rette parallele, cosa che suppongo conoscete; se così non fosse leggete questa osservazione dopo aver letto il paragrafo 1.14 a pagina 32.

Osservazione 1.16. Ovviamente le definizioni date di moltiplicazione e divisione di un segmento si possono estendere banalmente al caso in cui il numero divisore sia un numero razionale o un numero reale (nel caso della divisione deve essere diverso da zero), basta sostituire la parola "naturale" con "razionale" o con "reale".

Osservazione 1.17. È importante tener presente che dati due segmenti s e u può non esistere alcun numero razionale che moltiplicato per u ci dà s, in tal caso si dice che i segmenti s e u sono *incommensurabili* e ciò è uno dei motivi che porta all'introduzione dei numeri reali, tale argomento è affrontato nel volume 1.

1.9 MISURA DI PUNTI, CURVE E SEGMENTI

Nell'Appendice A del volume 1 è data la definizione rigorosa di grandezza fisica e unità di misura, in particolare è detto che il *metro* è l'unità di misura adottata dal Sistema Internazionale per la lunghezza.

In questo paragrafo la lunghezza e la relativa unità di misura (il metro) ci serviranno per dare una informazione quantitativa a punti, rette, curve e segmenti.

Misurare un segmento è molto semplice (in linea di principio), si prende il metro (o un suo multiplo o sottomultiplo) se vede quante volte il metro è contenuto (o contiene) nel segmento. Di solito la misura di un segmento si indica mettendo una linea sopra le lettere degli estremi del segmento, per esempio con $\overline{AB}$ si indica la misura del segmento AB. Teniamo comunque presente che spesso (e anche noi più avanti nel libro talvolta faremo così) si tende a confondere anche simbolicamente un segmento con la sua misura ma sarà chiaro dal contesto a cosa ci si riferisce; per esempio potremmo dire "dato il segmento $\overline{AB}$" (in luogo di "dato il segmento AB") o viceversa potemmo dire "consideriamo il segmento d" quando in realtà d è la *misura* del segmento.

Il punto, per definizione, ha dimensioni trascurabili, quindi la sua dimensione è sempre zero e di conseguenza non gli viene attribuita alcuna unità di misura.

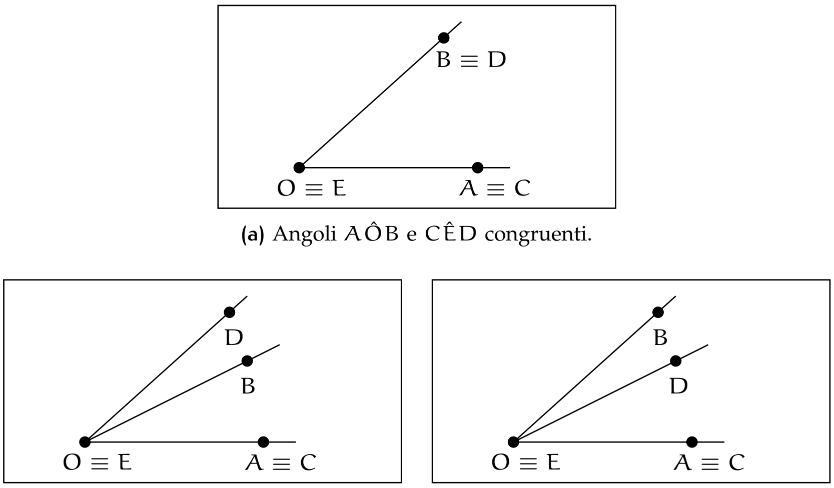
Le rette hanno per definizione lunghezza infinita.

Nel capitolo 8 vedremo come nota la lunghezza di certi segmenti ne possiamo ricavare la lunghezza di altri, in particolare il calcolo della lunghezza dei perimetri dei poligoni (la definizione di perimetro è nel paragrafo 1.13 a pagina 30) nota la lunghezza dei segmenti che lo compongono.

Anche le curve che non sono di estensione infinita, si misurano in metri. Il problema di come misurare una curva, considerando che la forma del metro è dritta, esula dagli scopi di questo testo perché bisogna far uso del concetto di integrale curvilineo. Nel paragrafo 8.4 a pagina 192 affronteremo "solo" il problema del calcolo della lunghezza di una curva particolare: la *circonferenza* (o di una sua parte), che sarà definita nel capitolo 6.

1.10 OPERAZIONI CON GLI ANGOLI

Postulato 1.10 (del trasporto degli angoli)**.** *Dato in un piano una semiretta, esiste un angolo e uno solo congruente ad un angolo dato, che abbia uno dei due lati*



(a) Angoli $A\hat{O}B$ e $C\hat{E}D$ congruenti.

(b) Angolo $A\hat{O}B$ minore di $C\hat{E}D$.

(c) Angolo $A\hat{O}B$ maggiore di $C\hat{E}D$.

Figura 1.35: Confronto tra angoli.

coincidente con la semiretta, il vertice nell'origine della semiretta e che giaccia da una parte prefissata rispetto ad essa.

Dal postulato del trasporto degli angoli segue che, in un piano, vi sono due angoli congruenti ad un angolo dato aventi il vertice nell'origine di una semiretta e uno dei due lati sopra la semiretta; questi due angoli sono situati da parte opposta rispetto al lato comune.

Come nel caso dei segmenti, l'affermare che esistono questi due angoli, equivale alla possibilità di costruirli con uno strumento qualsiasi: esiste quindi la possibilità di trasportare un dato angolo da una posizione ad un'altra dello spazio.

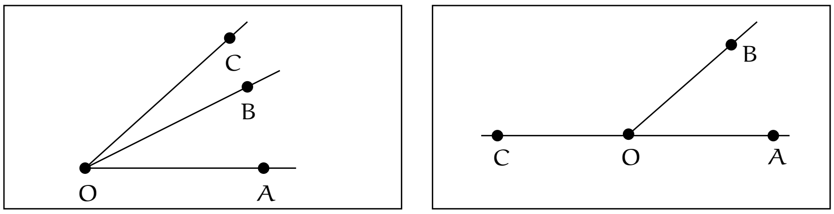
Proposizione 1.7 (Invertibilità dell'angolo)**.** *L'angolo $\widehat{ab}$ di due semirette è congruente all'angolo $\widehat{ba}$, quindi la congruenza di due angoli è indipendente dl verso della rotazione con la quale si può pensare di aver generato l'angolo.*

Definizione 1.31 (Confronto tra angoli)**.** Dati due angoli $A\hat{O}B$, $C\hat{E}D$ si immagini di spostare uno dei due angoli in modo che i vertici O e E coincidano e che il lato OA e EC siano sovrapposti. A questo punto si può avere uno dei seguenti tre casi:

- I lati OB e ED vengono a coincidere (figura 1.35a): in questo caso vuol dire, come sappiamo, che i due angoli sono *congruenti*.
- $A\hat{O}B$ è congruente a una parte di $C\hat{E}D$ (figura 1.35b): in questo caso si dice, che l'angolo $A\hat{O}B$ è *minore* di $C\hat{E}D$ e si scrive $A\hat{O}B < C\hat{E}D$.
- $C\hat{E}D$ è congruente a una parte di $A\hat{O}B$ (figura 1.35c): in questo caso si dice, che l'angolo $A\hat{O}B$ è *maggiore* di $C\hat{E}D$ e si scrive $A\hat{O}B > C\hat{E}D$.

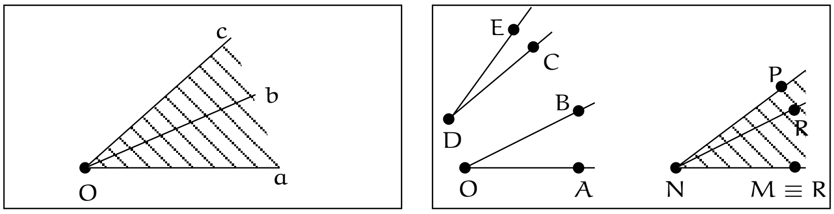
Per gli angoli valgono, come ora vedremo, proposizioni e definizioni analoghe a quelle dei segmenti.

Definizione 1.32 (Angoli consecutivi)**.** Due angoli si dicono *consecutivi* quando hanno il vertice e un lato coincidenti mentre gli atri due lati si trovano da parte opposta a questo lato comune (in figura 1.36a gli angoli $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ sono consecutivi).



(a) Consecutivi. (b) Adiacenti.

Figura 1.36: Angoli consecutivi e adiacenti.



(a) Consecutivi. (b) Non consecutivi.

Figura 1.37: Somma tra angoli.

Definizione 1.33 (Angoli adiacenti)**.** Due angoli si dicono *adiacenti* quando sono consecutivi e i lati non comuni sono costituiti da semirette opposte (in figura 1.36b gli angoli $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ sono adiacenti).

Osservazione 1.18. Se pensiamo all'angolo come a un oggetto *statico* è ovvio che non esistono angoli (piani) maggiori dell'angolo giro, perché quest'ultimo occupa tutto il piano. Se invece pensiamo l'angolo come un oggetto dinamico ovvero generato dalla rotazione di semiretta si può pensare che esistono angoli anche più grandi di un angolo giro, ad esempio un angolo che è *due* volte un angolo giro sarà l'angolo descritto da una semiretta che ha fatto *due* giri completi.

1.10.1 Operazioni con gli angoli

Definizione 1.34 (Somma di angoli)**.** Si chiama *somma* di due angoli consecutivi l'angolo formato dai lati non comuni degli angoli dati. Quindi dati due angoli (consecutivi) $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$, la loro somma è data dall'angolo $\widehat{ac}$ (figura 1.37a), e si scrive:

$$\widehat{ac} \cong \widehat{ab} + \widehat{bc}$$

In modo analogo si definisce la somma di più di due angoli consecutivi, come l'angolo formato dai lati non comuni a nessuno degli angoli dati.

Nel caso si debba fare la somma tra due angoli, $A\hat{O}B$ e $C\hat{D}E$, non consecutivi (figura 1.37b), si disegnano due angoli consecutivi $M\hat{N}R$ e $R\hat{N}P$ rispettivamente congruenti agli angoli dati. L'angolo $M\hat{N}P$ sarà la somma degli angoli non consecutivi dati.

La somma di due o più angoli gode delle seguenti ovvie proprietà:

- *Proprietà commutativa*: la somma di due o più angoli è indipendente dall'ordine degli addendi. In simboli, nel caso di due angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$:

$$\widehat{ab} + \widehat{bc} \cong \widehat{bc} + \widehat{ab}$$

- *Proprietà associativa*: la somma di più angoli non muta se a più addendi si sostituisce la loro somma. In simboli, nel caso di tre angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$:

$$(\widehat{ab} + \widehat{bc}) + \widehat{cd} \cong \widehat{ab} + (\widehat{bc} + \widehat{cd})$$

- Somme di angoli ordinatamente congruenti sono congruenti: cioè indicando con $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$ due angoli congruenti tra loro, $\widehat{ab} \cong \widehat{cd}$, e con $\widehat{ef}$ e $\widehat{hi}$ altri due angoli congruenti tra loro, $\widehat{ef} \cong \widehat{hi}$, si può scrivere che

$$\widehat{ab} + \widehat{ef} \cong \widehat{cd} + \widehat{hi}$$

Osservazione 1.19. In base alla definizione è evidente che la somma di più angoli, siano pur essi tutti convessi, può condurre a un angolo piatto, ad un angolo concavo, ad un angolo giro ed anche ad un angolo più grande dell'angolo giro.

Definizione 1.35 (Differenza tra angoli)**.** Dati due angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$ con il primo congruente o maggiore del secondo, si chiama *differenza* tra $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$ l'angolo $\widehat{ef}$ che sommato al secondo ci da un angolo congruente al primo, cioè tale che: $\widehat{ab} \cong \widehat{cd} + \widehat{ef}$. La differenza tra $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$ si indica con $\widehat{ab} - \widehat{cd}$.

È immediato riconoscere che:

Proposizione 1.8. *Differenze di angoli ordinatamente congruenti sono congruenti.* Cioè dato un angolo $\widehat{ab}$ congruente con un segmento $\widehat{cd}$ e un angolo $\widehat{ef}$ congruente con un angolo $\widehat{hi}$, si può scrivere, se $\widehat{ab} \geqslant \widehat{cd}$, che $\widehat{ab} - \widehat{cd} \cong \widehat{ef} - \widehat{hi}$. In simboli:

$$(\widehat{ab} \cong \widehat{cd}, \widehat{ef} \cong \widehat{hi}) \implies \widehat{ab} - \widehat{cd} \cong \widehat{ef} - \widehat{hi}$$

Definizione 1.36 (Moltiplicazione)**.** *Moltiplicare* un angolo per un numero naturale significa costruire l'angolo somma di tanti angoli uguali al dato, quante sono le unità del numero naturale. La somma di n angoli congruenti a un angolo dato $\widehat{ab}$ si dice *multiplo* di $\widehat{ab}$ *secondo il numero* n e si indica con $n \cdot \widehat{ab}$ o con $n\widehat{ab}$.
I successivi multipli di $\widehat{ab}$ si dicono: *doppio* ($2\widehat{ab}$), *triplo* ($3\widehat{ab}$), *quadruplo* ($4\widehat{ab}$), eccetera, di $\widehat{ab}$.

Definizione 1.37 (Divisione)**.** *Dividere* un angolo $\widehat{ab}$ per un numero naturale n significa costruire l'angolo che moltiplicato per il numero naturale n ci dà $\widehat{ab}$. L'angolo risultato della divisione si dice *sottomultiplo* (o *summultiplo*) di $\widehat{ab}$ *secondo il numero* n e si indica con $\frac{\widehat{ab}}{n}$ (oppure con $\widehat{ab}/n$, oppure con $\frac{1}{n}\widehat{ab}$).
I successivi sottomultipli di $\widehat{ab}$ si dicono: la *metà* ($\widehat{ab}/2$), la *terza parte* ($\widehat{ab}/3$), la *quarta parte* ($\widehat{ab}/4$), eccetera, di $\widehat{ab}$.

Osservazione 1.20. Ovviamente le definizioni date di moltiplicazione e divisione di un angolo si possono estendere banalmente al caso in cui il numero sia un numero razionale o un numero reale (nel caso della divisione deve essere diverso da zero), basta sostituire la parola "naturale" con "razionale" o con "reale".

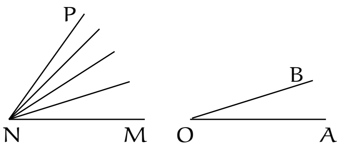


Figura 1.38: Esempio di misura di un angolo.

1.11 MISURA DEGLI ANGOLI

Essendo l'angolo la regione di piano compresa tra due semirette capiamo subito che l'area (intesa come regione di spazio occupata dall'angolo) occupata da un qualsiasi angolo è infinita, quindi per per dare una misura di angolo che non sia infinita dobbiamo definire la "grandezza" di un angolo in altro modo.[12]

Intanto diciamo subito che la grandezza di un angolo si chiama *ampiezza*. È allora evidente (come spiegato anche nel paragrafo A1 del volume 1) che per dare una misura a un angolo il modo più semplice è quello di paragonarlo ad un angolo di riferimento detto *unità di misura* e determinare il numero di volte che il primo angolo contiene (o è contenuto) il secondo.

Per esempio con riferimento alla figura 1.38 si può dire che l'angolo $M\hat{N}P$ contiene 4 volte l'angolo $A\hat{O}B$, diremmo allora che la misura di $M\hat{N}P$ è 4 rispetto ad $A\hat{O}B$, e scriveremo:

$$M\hat{N}P = 4A\hat{O}B.$$

Se poi ci si mette d'accordo nel considerare come unità di misura per esempio l'angolo $A\hat{O}B$, allora diremo che la misura di $M\hat{N}P$ è 4

$$M\hat{N}P = 4,$$

senza specificare l'angolo di riferimento.

Nella realtà nel corso dei periodi storici e passando da un paese all'altro è capitato che come unità di misura sono stati indicati diversi angoli, quindi tutt'oggi è bene *non* sottointendere qual è l'unità di misura.

1.11.1 Gradi sessagesimali

Per gli angoli l'unità di misura più adoperata anche nella vita quotidiana è il cosiddetto *grado sessagesimale* o *grado d'arco*, che spesso chiameremo semplicemente *grado*; rappresenta la 360-esima parte di un angolo giro, e si indica con con $1°$.

Se, per esempio, un angolo contiene il *grado* tre volte diremo che la sua misura è 3 rispetto al grado e quindi la sua *ampiezza* è $3°$.

Poiché nella maggior parte dei casi il grado non è contenuto un numero intero di volte nell'angolo che si vuole misurare, si fa uso dei suoi sottomultipli che sono il *primo* e il *secondo*. Essi si indicano rispettivamente con $1'$ e $1''$, e valgono rispettivamente la sessantesima parte del grado e la sessantesima parte del primo

$$1° = 60', \qquad 1' = 60''.$$

Perciò se, per esempio, un angolo ha l'ampiezza di 32 gradi, 17 primi e 25 secondi, si scrive $32°17'25''$.

12 Il concetto di "area" sarà formalizzato nel paragrafo 7.1 a pagina 159

In base alla definizione di grado sessagesimale è ovvio che (essendo l'angolo piatto la meta di uno giro e quello retto la metà di un piatto)

- L'angolo giro ha un'ampiezza di $360°$.
- L'angolo piatto ha un'ampiezza di $180°$.
- L'angolo retto ha un'ampiezza di $90°$.

Nelle scienze, per studiare oggetti in movimento rotatorio può essere utile far riferimento ad angoli maggiori di $360°$, per esempio dicendo che un angolo vale $520°$ si può immaginare che esso si ottenuto da una rotazione di una semiretta per un giro completo più un altro mezzo giro $(320 + 180 = 520)$. Inoltre sempre nelle scienze può essere importante dare un *segno* agli angoli per specificare il verso della rotazione della semiretta che ruota, tipicamente si dà il segno positivo se la rotazione è avvenuta in senso antiorario e negativa se orario. Ad esempio dire che un angolo vale $-90°$ significa che la rotazione è avvenuta di un angolo retto in senso orario.

Un angolo espresso in gradi sessagesimali si dice in *forma normale* se i suoi primi e secondi sono compresi tra il numero 0 e 60. Un angolo non espresso in forma normale si può sempre portare in forma normale.

Esempio 1.2. L'angolo $74°62'45''$ non è in forma normale, in quanto i primi sono maggiori di 60. Per trasformarlo in forma normale basta osservare che $62'$ sono uguali a un grado (che sono sessanta primi) più due primi, quindi la forma normale dell'angolo dato è $75°2'45''$.

Esempio 1.3. Si vuole conoscere di quanti primi è fatto l'angolo (in forma normale) $42°18'$.

Soluzione. Siccome ogni ogni grado sono sessanta primi,

$$42°18' = (42 \cdot 60 + 18)' = 2538'.$$

Esempio 1.4. Si vuole conoscere di quanti secondi è fatto l'angolo (in forma normale) $24°25'40''$.

Soluzione. Siccome ogni ogni grado sono settanta primi e ogni primi sono sessanta secondi,

$$24°25'40'' = (24 \cdot 60 \cdot 60 + 25 \cdot 60)'' + 40'' = 87\,940''.$$

L'ampiezza di un angolo si può anche esprimere attraverso un numero decimale di gradi, per esempio è lecito avere l'angolo $36.034°$ (36 gradi, 0 decimi, 3 centesimi e 4 millesimi di grado).

Si può passare dalla rappresentazione decimale dell'ampiezza a quella in gradi, primi, secondi o viceversa; per esempio

$$36.034° = 36°20'24''.$$

La procedura per passare da una rappresentazione decimale a quella in gradi, minuti e secondi è semplice:

1. Si parte considerando la parte decimale dell'angolo, nel nostro caso: $0.34°$.

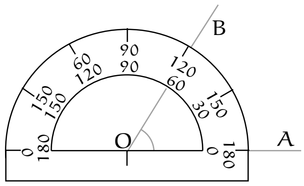


Figura 1.39: Rapportatore o goniometro.

2. Si imposta la proporzione che 1° (un grado) sta a $60'$ (60 primi) come la parte decimale sta a x primi, nel nostro caso

$$\frac{1^\circ}{60'} = \frac{0.34^\circ}{x} \iff x = 60' \cdot 0.34^\circ = 20.4'$$

la parte intera del numero ottenuto sono i primi.

3. Si prende la parte decimale dei primi ottenuti, nel nostro caso $0.4'$.

4. Si imposta la proporzione che $1'$ (un primo) sta a $60''$ (60 secondi) come la parte decimale sta a x secondi, nel nostro caso

$$\frac{1'}{60''} = \frac{0.4'}{x} \iff x = 60'' \cdot 0.4' = 24''$$

il numero ottenuto sono i secondi.

Può capitare che il calcolo dei secondi porti a un numero decimale, vuol dire che l'angolo di partenza aveva una misura che ha una risoluzione più piccola del secondo.

Osservazione 1.21. Ovviamente in linea di principio la rappresentazione decimale è più accurata di quella in gradi, minuti, secondi, perché possiamo avere un numero qualsiasi di cifre dopo il separatore decimale, a meno che non si prevede che anche nella rappresentazione in gradi, minuti, secondi, si possano avere numeri decimali. In genere quando è richiesta una accuratezza nell'esprimere l'ampiezza di un angolo che sia più piccola del "secondo" si ricorre esclusivamente alla rappresentazione decimale, comunque nessuno vieta di usare una rappresentazione gradi, minuti, secondi, in cui uno o più dei tre numeri sono decimali.

Goniometro

Nella pratica, per la misura di i angoli, si adoperano vari strumenti. Il più semplice è il *rapportatore* o *goniometro*. Come si vede in figura 1.39 è costituito di un materiale rigido qualsiasi (plastica, legno, stagno, ecc.) tagliato a forma di semicerchio dal quale si è tolta la parte centrale.[13] Sul diametro, un segno fatto nel suo punto medio indica il *centro* del goniometro. Le semiconferenze che costituiscono l'orlo dello strumento vengono divise, ciascuna, in 180 e numerate nei due versi opposti; tipicamente c'è una tacca per ogni grado, ma in figura 1.39 per ragioni grafiche ho indicato solo tacche ogni 30°. Nel caso di figura 1.39 è supposta la misura di un angolo $A\hat{O}B$ di 60°.

13 Penso che sappiate cosa sia un semicerchio, un cerchio, un diametro ecc.; in ogni caso li definiremo nel capitolo 6.

Operazioni

Le operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, di gradi sessagesimali si svolgono come visto per i numeri reali. Come vedremo con i seguenti esempi conviene agire separatamente sui gradi, primi e secondi e poi alla fine, eventualmente, mettere l'angolo in forma normale.

Esempio 1.5. Calcolare la seguente somma tra ampiezze di angoli esprimendo il risultato in forma normale

$$25°36'48'' + 37°51'27'' + 12°8'54''$$

Soluzione. Eseguiamo singolarmente la somma dei gradi, primi e secondi

$$\begin{array}{rrrc} 25° & 36' & 48'' & + \\ 37° & 51' & 27'' & + \\ 12° & 8' & 54'' & = \\ \hline 74° & 95' & 129'' & \end{array}$$

Il numero ottenuto non è in forma normale perché i primi e secondi sono superiori a 59: considerando che

$$95' = 60' + 35' = 1° + 35' \qquad 129'' = 2 \cdot 60'' + 9'' = 2' + 9''$$

Il risultato espresso in forma normale è $75°37'9''$

Esempio 1.6. Calcolare la seguente sottrazione tra ampiezze di angoli esprimendo il risultato in forma normale

$$72°25'48'' - 56°59'36''$$

Soluzione. La sottrazione si può svolgere perché il minuendo è $\geqslant$ del sottraendo, ma dovendo operare separatamente tra gradi, primi e secondi, notiamo come il minuendo ha numero di primi (25) minore di quelli del sottraendo (59); allora, per fare la sottrazione, ci facciamo prestare, nel minuendo, un grado in modo in modo che i primi diventano $25 + 60 = 85$, cioè il minuendo lo scriviamo nella forma (non normale)

$$71°85'48''$$

Eseguiamo ora la sottrazione

$$\begin{array}{rrrc} 71° & 85' & 48'' & - \\ 56° & 59' & 36'' & = \\ \hline 15° & 26' & 12'' & \end{array}$$

Il numero ottenuto $15°26'12''$ è in forma normale.

Esempio 1.7. Calcolare la seguente moltiplicazione tra l'ampiezza di un angolo e un numero intero, esprimendo il risultato in forma normale

$$8 \cdot 32°58'49''$$

Soluzione. Si moltiplicano per il numero dato tutte le unità dei vari ordini dell'ampiezza dell'angolo

$$\begin{array}{rrrc} 32° & 58' & 49'' & \times \\ & & 8 & = \\ \hline 256° & 464' & 392'' & \end{array}$$

Il numero ottenuto non è in forma normale perché i primi e secondi sono superiori a 59. Cconsiderando che

$$464' = 7 \cdot 60' + 44' = 7° + 44' \qquad 392'' = 6 \cdot 60'' + 32'' = 6' + 32''$$

Il risultato espresso in forma normale è $263°50'32''$

Esempio 1.8. Calcolare la seguente divisione tra l'ampiezza di un angolo e un numero intero, esprimendo il risultato in forma normale

$$202°44'43'' : 7$$

Soluzione. La prima cosa da fare è dividere il numero di gradi per il divisore

$$202 = 7 \cdot 28 + 6$$

quindi 28 è il quoziente e 6 è il resto. Ora il resto (che sono gradi) si moltiplica per 60 in modo da ottenere il resto in primi e tale valore si aggiungono i primi dell'ampiezza di partenza

$$6 \cdot 60 + 44 = 360 + 44 = 404$$

Si dividono tali primi per il divisore ottenendo

$$404 = 7 \cdot 57 + 5$$

quindi 57 è il quoziente e 7 è il resto. Ora il resto (che sono primi) si moltiplica per 60 in modo da ottenere il resto in secondi e a tale valore si aggiungono i secondi dell'ampiezza di partenza

$$5 \cdot 60 + 43 = 300 + 43 = 343$$

Si dividono tali secondi per il divisore ottenendo

$$\frac{343}{7} = 49$$

In definitiva il risultato è $28°57'49''$

1.11.2 Grado centesimale

Un'altra unità di misura degli angoli è il *grado centesimale*, indicato con gon o, più comunemente come grad. Corrisponde a un 1/400 dell'angolo giro ovverosia 1/100 dell'angolo retto.

Il legame tra grado centesimale e grado centesimale è

$$1\,\mathsf{grad} = 0.9°.$$

infatti basta impostare la proporzione

$$\frac{1\,\mathsf{grad}}{1°} = \frac{360}{400} \Leftrightarrow \frac{1\,\mathsf{grad}}{1°} = 0.9$$

Il grado centesimale fece parte del sistema metrico sviluppato in Francia nel XVIII secolo sotto la spinta di Luigi XVI ma ormai è abbastanza in disuso, anche se tuttora molte calcolatrici permettono di fare i calcoli con tale unità di misura.

Esercizi: operazioni con gli angoli

Esercizio 1.1. Calcolare la seguente somma tra ampiezze di angoli esprimendo il risultato in forma normale

$$53°23'48'' + 11°18'39'' + 24°7'53'' \qquad [88°50'20'']$$

Esercizio 1.2. Calcolare la seguente somma tra ampiezze di angoli esprimendo il risultato in forma normale

$$47°15' + 32°48'' + 10°19'' \qquad [89°16'7'']$$

Esercizio 1.3. Calcolare la seguente sottrazione tra ampiezze di angoli esprimendo il risultato in forma normale

$$58°24'39'' - 19°37'45''$$

Esercizio 1.4. Calcolare la seguente sottrazione tra ampiezze di angoli esprimendo il risultato in forma normale

$$36° - 15°34'42'' \qquad [21°25'19'']$$

Esercizio 1.5. Calcolare la seguente sottrazione tra ampiezze di angoli esprimendo il risultato in forma normale

$$27° - 12°15'' \qquad [17°59'15'']$$

Esercizio 1.6. Calcolare la seguente moltiplicazione tra l'ampiezza di un angolo e un numero intero, esprimendo il risultato in forma normale

$$23°42'19'' \cdot 5 \qquad [118°31'35'']$$

Esercizio 1.7. Calcolare la seguente moltiplicazione tra l'ampiezza di un angolo e un numero intero, esprimendo il risultato in forma normale

$$52°24' \cdot 8 \qquad [427°12']$$

Esercizio 1.8. Calcolare la seguente moltiplicazione tra l'ampiezza di un angolo e un numero intero, esprimendo il risultato in forma normale

$$12°41'57'' \cdot 12 \qquad [152°22'24'']$$

Esercizio 1.9. Calcolare la seguente divisione tra l'ampiezza di un angolo e un numero intero, esprimendo il risultato in forma normale

$$124°32'48'' : 3 \qquad [41°30'56'']$$

Esercizio 1.10. Calcolare la seguente divisione tra l'ampiezza di un angolo e un numero intero, esprimendo il risultato in forma normale

$$24°14'57'' : 7 \qquad [3°27'51'']$$

Esercizio 1.11. Calcolare la seguente divisione tra l'ampiezza di un angolo e un numero intero, esprimendo il risultato in forma normale

$$124°32'48'' : 12 \qquad [3°27'51'']$$

1.12 ANGOLI PARTICOLARI

Nel paragrafo 1.6 a pagina 9 abbiamo definito tre angoli particolari: l'angolo giro, piano, retto. In questo paragrafo vedremo altri angoli di particolare interesse.

Definizione 1.38 (Angoli esplementari)**.** Due angoli si dicono *esplementari* se la loro somma è (congruente a) un angolo giro. In figura 1.40 l'angolo convesso $\widehat{ab}$ è esplementare all'angolo concavo $\widehat{ba}$.

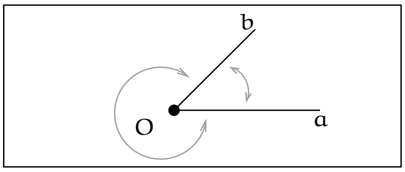


Figura 1.40: Angoli esplementari.

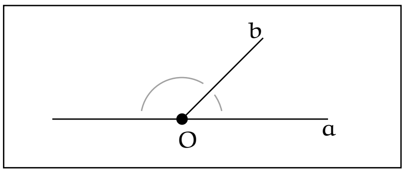


Figura 1.41: Angoli supplementari.

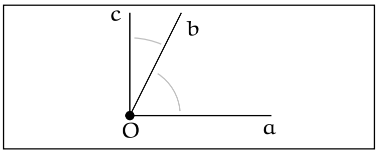


Figura 1.42: Angoli complementari.

Esempio 1.9. Angoli convesso di 30° e concavo di 330° sono angoli esplementari, infatti la loro somma è 360°, ovvero un angolo giro.

Definizione 1.39 (Angoli supplementari)**.** Due angoli si dicono *supplementari* se la loro somma è (congruente a) un angolo piatto (figura 1.41).

Esempio 1.10. Angoli convessi di 120° di 60° sono angoli supplementari, infatti la loro somma è 180°, ovvero un angolo piatto.

Proposizione 1.9. *Angoli supplementari di uno stesso angolo sono congruenti fra loro.* Dati, cioè, due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ se questi sono supplementari a un angolo $\widehat{ef}$ allora si ha $\widehat{ab} \cong \widehat{cd}$.

Dimostrazione. Siccome angoli supplementari sono congruenti tra loro, si ha:

$$\widehat{ab} + \widehat{ef} \cong \widehat{cd} + \widehat{ef}$$

Dal primo membro di questa uguaglianza si ricava che:

$$\widehat{ab} \cong (\widehat{ab} + \widehat{ef}) - \widehat{ef}$$

mentre dal secondo membro si ha:

$$\widehat{cd} \cong (\widehat{cd} + \widehat{ef}) - \widehat{ef}$$

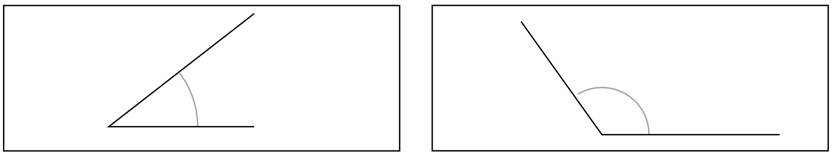
essendo come detto $\widehat{ab} + \widehat{ef} \cong \widehat{cd} + \widehat{ef}$ e ovviamente $\widehat{ef} \cong \widehat{ef}$ per la proposizione 1.8 a pagina 21 segue che $\widehat{ab} \cong \widehat{cd}$. □

Osservazione 1.22. Due angoli adiacenti sono supplementari, quindi per costruire il supplementare di un angolo basta costruire il suo adiacente prolungando uno dei dati.

Definizione 1.40 (Angoli complementari)**.** Due angoli si dicono *complementari* se la loro somma è (congruente a) un angolo retto (in figura 1.42 gli angolo $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ sono complementari).

Esempio 1.11. Angoli convessi di 30° di 60° sono angoli complementari, infatti la loro somma è 90°, ovvero un angolo retto.

Definizione 1.41 (Angolo acuto)**.** Un angolo minore di un angolo retto si dice *acuto* (figura 1.43a).



(a) Acuto. (b) Ottuso.

Figura 1.43: Angoli acuti e ottusi.

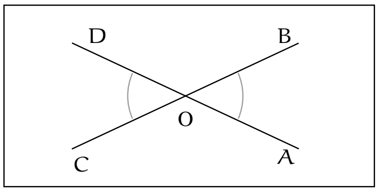


Figura 1.44: Angoli opposti al vertice.

Definizione 1.42 (Angolo ottuso)**.** Un angolo maggiore di un angolo retto si dice *ottuso* (figura 1.43b).

Definizione 1.43 (Angoli opposti al vertice)**.** Due angoli convessi si dicono *opposti al vertice* se i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro (figura 1.44).

Osservazione 1.23. La retta bisettrice di un angolo (definizione 1.19) divide manifestamente per metà anche l'angolo opposto al vertice del primo.

Teorema 1.3. *Due angoli opposti al vertice sono congruenti.* In simboli, con riferimento alla figura 1.44

$$A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$$

Dimostrazione. Come si vede dalla figura 1.44 i due angoli opposti al vertice $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ sono entrambi adiacenti all'angolo $B\hat{O}C$ e quindi sono entrambi supplementari dello stesso angolo $B\hat{O}C$ e quindi per la proposizione 1.9 a pagina 28 sono congruenti, cioè $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$. □

Esercizi

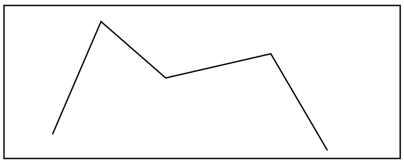
Esercizio 1.12. Calcolare l'ampiezza di un angolo uguale alla quinta parte di un angolo piatto. [36°]

Esercizio 1.13. Un angolo ha l'ampiezza di 35°. Calcola l'ampiezza del suo complementare, del suo supplementare e della somma di essi.
[55°; 180°; 200°]

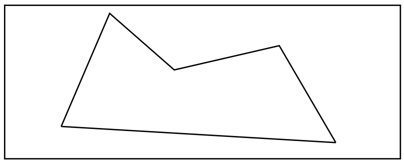
Esercizio 1.14. Due angoli adiacenti sono il quadruplo dell'altro. Calcolare l'ampiezza di ciascuno di essi. [60°; 240°]

Esercizio 1.15. Le ampiezze di tre angoli consecutivi sono rispettivamente di 45°, 36° e di 48°. Calcolare l'ampiezza dell'angolo che si deve addizionare alla loro somma per ottenere un angolo piatto. [51°]

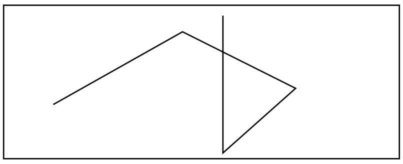
Esercizio 1.16. Calcolare l'ampiezza dell'angolo uguale alla somma del complementare e del supplementare dell'angolo di 40°. [190°]



(a) Aperta.



(b) Chiusa.



(c) Intrecciata.

Figura 1.45: Spezzate.

Esercizio 1.17. Un angolo retto è diviso in tre parti di cui la prima è tripla della seconda e questa è la quinta parte della terza. Calcolare le ampiezze dei tre angoli. [$10°$; $30°$; $50°$]

Esercizio 1.18. Dividere un angolo piatto in cinque parti, di cui ognuna superi la precedente di $15°$. [$6°$; $21°$; $36°$; $51°$; $66°$]

1.13 SPEZZATE, POLIGONI E LORO ELEMENTI

Definizione 1.44 (Spezzata)**.** Una figura formata da più segmenti consecutivi si chiama *spezzata* o *poligonale* (figura 1.45). I segmenti che costituiscono la spezzata si chiamano *lati* e loro estremi si chiamano *vertici*.

Definizione 1.45 (Spezzata aperta)**.** Una spezzata si dice *aperta* se ci sono vertici non comuni a più di un segmento (in particolare tali vertici sono sempre due) (figura 1.45a). Ogni vertice quindi in una spezzata aperta è comune a due lati della spezzata, tranne il primo e l'ultimo, che si dicono gli *estremi* della poligonale.

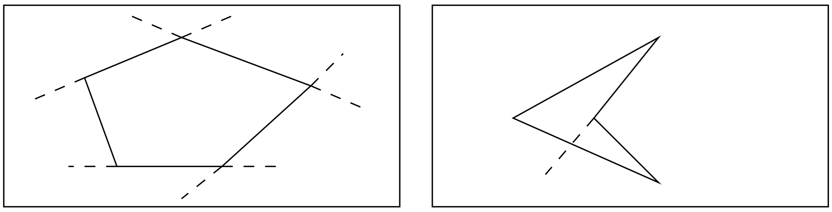
Definizione 1.46 (Spezzata chiusa)**.** Una spezzata si dice *chiusa* se ogni vertice è comune ad almeno due lati (figura1.45b).

Definizione 1.47 (Spezzata intrecciata e semplice)**.** Una spezzata che ha, almeno, due lati non consecutivi che si intersecano si dice *intrecciata* (figura 1.45c). Una spezzata non intrecciata si dice *semplice*.

Osservazione 1.24. Nel seguito faremo riferimento, salvo avviso contrario, solo a spezzate semplici.

Definizione 1.48 (Poligono)**.** Si chiama *poligono* la figura formata da una spezzata chiusa, semplice e dalla parte finita di piano da essa limitata (figura 1.46). I vertici e i lati della spezzata si dicono rispettivamente i *vertici* e i *lati* del poligono.

Definizione 1.49 (Vertici consecutivi e opposti)**.** Dato un poligono, due vertici si dicono *consecutivi* se appartengono allo stesso lato, viceversa si dicono *opposti*.



(a) Poligono convesso. (b) Poligono concavo.

Figura 1.46: Poligoni.

Definizione 1.50 (Perimetro di un poligono)**.** Dato un generico poligono si chiama *perimetro* ogni segmento congruente alla somma dei lati del poligono.

Osservazione 1.25. Anche la lunghezza del perimetro si chiama *perimetro*. A seconda del contesto sarà chiaro se ci riferiamo al segmento perimetro o alla sua lunghezza.

Definizione 1.51 (Poligono convesso)**.** Un poligono si dice *convesso* se giace tutto da una parte rispetto a ciascuna retta ottenuta prolungando ogni uno dei lati (figura 1.46a). Un poligono non convesso si dice *concavo* e quindi è caratterizzato dal fatto che il prolungamento di uno (o più) dei suoi lati lo divide in due parti (figura 1.46b).

Osservazione 1.26. Nel seguito faremo riferimento, salvo avviso contrario, solo a poligoni *convessi*.

Un poligono ha sempre un ugual numero di lati e vertici. Tale numero dà il nome al poligono convesso, infatti si danno i seguenti nomi:

- *Triangolo*: poligono di 3 lati.
- *Quadrangolo* o *quadrilatero*: poligono di 4 lati.
- *Pentagono*: poligono di 5 lati.
- *Esagono*: poligono di 6 lati.
- *Eptagono*: poligono di 7 lati.
- *Ottagono*: poligono di 8 lati.
- *Decagono*: poligono di 10 lati.
- *Dodecagono*: poligono di 12 lati.
- *Pentadecagono*: poligono di 15 lati.

Dalle definizioni date e dai postulati finora ammessi si possono dedurre facilmente le seguenti due proposizioni:

Proposizione 1.10. *Il segmento individuato da due punti interni di un poligono convesso è tutto interno al poligono.*

Proposizione 1.11. *Il segmento che unisce un punto interno con un punto esterno ad un poligono convesso taglia il contorno del poligono in un punto e uno solo.*

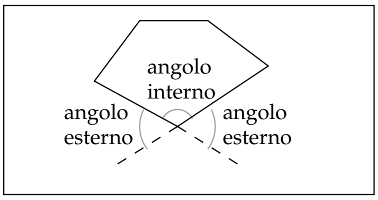


Figura 1.47: Angoli interni ed esterni a un poligono.

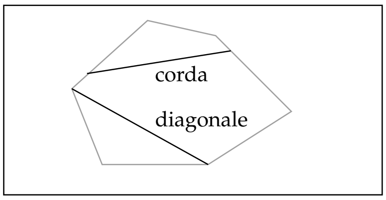


Figura 1.48: Diagonale e corda di un poligono.

Definizione 1.52 (Angoli interni di un poligono)**.** Gli angoli convessi formati dalle coppie di lati consecutivi di un poligono convesso, si dicono *angoli interni al poligono* o semplicemente *angoli del poligono* (figura 1.47).

Definizione 1.53 (Angoli esterni di un poligono)**.** Gli angoli adiacenti agli angoli interni di un poligono si chiamano *angoli esterni del poligono*, ciascuno di essi è compreso fra un lato del poligono e il prolungamento di un lato consecutivo al primo (figura 1.47).

Osservazione 1.27. Ad ogni angolo interno si possono associare due angoli esterni adiacenti, che essendo opposti al vertice, sono congruenti fra loro (teorema 1.3 a pagina 29).

Definizione 1.54 (Elementi di un poligono)**.** I lati e gli angoli interni di un poligono si dicono essere i suoi *elementi*.

Definizione 1.55 (Diagonale di un poligono)**.** Il segmento che ha per estremi due vertici non consecutivi di un poligono si chiama *diagonale* (figura 1.48).[14]

Proposizione 1.12. *Il numero* d *delle diagonali che si possono condurre in un poligono di* n *lati è dato da:*

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Definizione 1.56 (Corda di un poligono)**.** Si chiama *corda* di un poligono ogni segmento che ha per estremi due punti qualunque del contorno del poligono non appartenenti ad uno stesso lato (figura 1.48).[15]

1.14 RETTE PERPENDICOLARI E PARALLELE

Definizione 1.57 (Rette perpendicolari)**.** Due rette si dicono *perpendicolari*, *normali*, od *ortogonali* se formano quattro angoli retti (figura 1.49). Per indi-

14 Banalmente il segmento che ha per estremi due vertici consecutivi di un poligono è un suo lato.

15 Banalmente il segmento che ha per estremi due punti qualunque del contorno appartenenti ad uno stesso lato è un pezzo di lato.

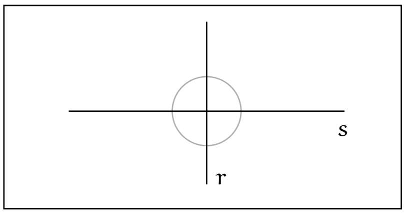


Figura 1.49: Rette perpendicolari.

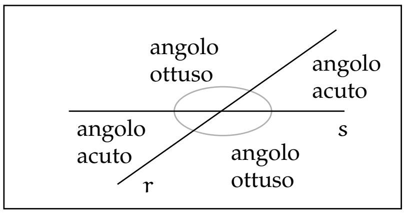


Figura 1.50: Rette oblique.

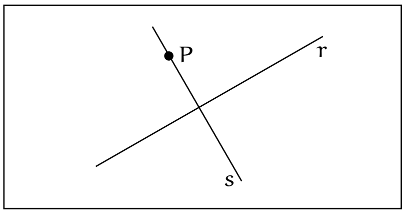


Figura 1.51: Retta (s) passante per un punto P e ortogonale a un'altra retta (r).

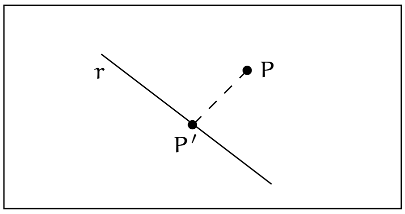


Figura 1.52: Il punto P' è il piede della perpendicolare da P a r.

care che due rette r e s sono perpendicolari si scrive $r \perp s$. Equivalentemente si può dire due rette si dicono perpendicolari quando formano quattro angoli uguali.

Osservazione 1.28. Essendo per definizione un angolo retto la metà di un angolo piatto vuol dire che un *angolo retto è congruente al suo adiacente (o al suo supplementare)*. Allora è ovvio che se due rette si intersecano in modo da formare un angolo retto, anche gli altri tre angoli sono retti: infatti i primi due sono retti perché adiacenti al primo e il quarto perché apposto al vertice (figura 1.49). Quindi per poter affermare che due rette sono perpendicolari basta sapere che uno dei quattro angoli da esse formati è retto, oppure che due angoli adiacenti sono congruenti.

Definizione 1.58 (Semirette e segmenti perpendicolari)**.** Due semirette o due segmenti si dicono *perpendicolari* se lo sono le rette a cui tali elementi appartengono.

Definizione 1.59 (Rette oblique)**.** Due rette si dicono *oblique* se si intersecano tra loro ma non sono perpendicolari (figura 1.50).

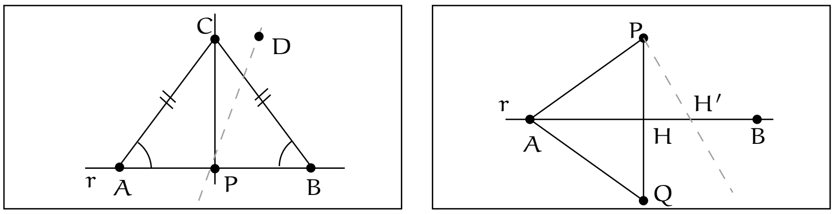
Osservazione 1.29. Ovviamente dei quattro angoli che due rette oblique formano tra loro due sono acuti (congruenti fra loro perché opposti al vertice) e due sono ottusi (anch'essi congruenti fra loro perché opposti al vertice), perché comunque la somma dei quattro angoli deve dare un angolo giro).

Teorema 1.4 ([16])**.** *Dato in un piano un punto* P *e una retta* r, *esiste una e una sola retta che passa per* P *ed è perpendicolare ad* r (figura 1.51).

Dimostrazione. Si possono presentare due casi:

1. Il punto P sta sulla retta r (figura 1.53a).
   Si prendano sopra r, da bande opposte di P, due segmenti congruenti $PA \cong PB$ e con la base AB si costruisca sopra un triangolo isoscele ABC,

16 Richiede i teoremi di congruenza dei triangoli, del paragrafo 2.3 a pagina 42 e corollario 2.12 a pagina 49.



(a) Caso del punto P appartenente a r.   **(b)** Caso del punto P non appartenente a r.

Figura 1.53: Dimostrazione di esistenza e unicità di una retta passante per un punto e perpendicolare a un'altra.

indi si unisca C con P: mostriamo ora che la retta CP è perpendicolare a r. I due triangoli ACP, BCP risultano congruenti per avere i tre lati rispettivamente congruenti: sono perciò congruenti i due angoli adiacenti $C\hat{P}A$ e $C\hat{P}B$ (opposti ai lati congruenti AC e BC) e ciò basta (per l'osservazione di pagina 33) per affermare che la retta CP è perpendicolare ad r.
Un'altra, qualsiasi, retta PD passante per P non può essere perpendicolare alla retta r. Infatti, supponendo, per esempio, che PD appartenga all'angolo CPB, si ha (figura 1.53a):

- $D\hat{P}A > C\hat{P}A$, perché il primo angolo contiene il secondo,
- $C\hat{P}A \cong C\hat{P}B$, essendo entrambi angoli retti,
- $C\hat{P}B > D\hat{P}B$, perché il primo angolo contiene il secondo, quindi si ha:

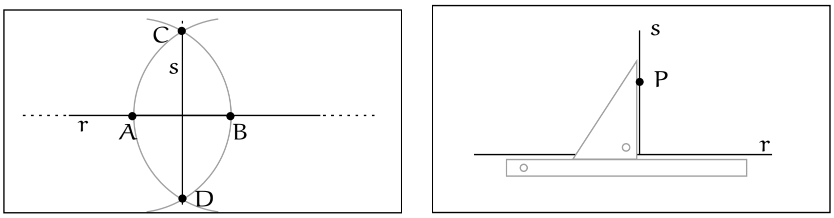
$$D\hat{P}A > D\hat{P}B$$

ossia la retta DP, formando con r angoli disuguali, è ad essa obliqua. Quindi la retta perpendicolare ad r passante per P è unica.

2. Il punto P è fuori la retta r (figura 1.53b).
Uniamo il punto P con un punto qualsiasi A della retta r, se i due angoli adiacenti che ne risultano fossero congruenti, la retta PA sarebbe già perpendicolare alla r e null'altro si dovrebbe fare. Se ciò non accade, si tracci per A la semiretta AQ che formi con r da banda opposta rispetto a P un angolo $Q\hat{A}B$ congruente all'angolo $P\hat{A}B$ (con B punto di r che si trova dalla stessa parte di P) poi su di essa si prenda $AQ \cong AP$. Congiunto P con Q, dimostriamo che la retta PQ è perpendicolare ad r.
Detto H il punto di intersezione delle rette PQ ed r, i due triangoli PAH, QAH sono congruenti per avere due lati e l'angolo compreso rispettivamente congruenti e da ciò deriva che sono congruenti i due angoli adiacenti $A\hat{H}P$, $A\hat{H}Q$ (opposti ai lati congruenti AP e AQ), ossia (per l'osservazione 1.28) PQ è perpendicolare a r.
Qualunque altra retta passante per P e che incontri r in punto H′ (diverso da H) non può essere perpendicolare ad r, perché altrimenti il triangolo PHH′ avrebbe due angoli retti e ciò non può accadere per il corollario 2.12 a pagina 49. □

Osservazione 1.30. Per tracciare due rette perpendicolari tra loro si procede in questo modo (figura 1.54a):[17]

17 Il procedimento richiede la conoscenza del concetto di arco di circonferenza che vedremo nei capitoli successivi, ma penso comunque intuitivamente noto a tutti, quindi potete leggere subito il semplice procedimento.



(a) Rette perpendicolari.

(b) Retta passante per un punto e perpendicolare a un'altra.

Figura 1.54: Costruzione grafica di rette perpendicolari

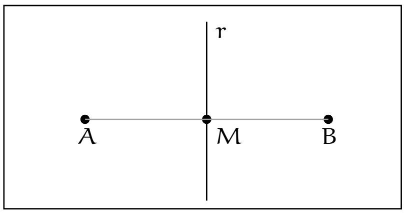


Figura 1.55: Asse di un segmento.

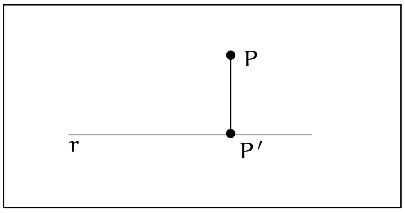


Figura 1.56: Distanza di un punto da una retta.

A. Si traccia una retta r (servendosi di un righello)

B. Si considera un segmento AB di lunghezza qualsiasi sulla retta

C. Si punta un compasso in uno degli estremi del segmento, per esempio A e si apre il compasso fino a B;

D. Si traccia un arco di circonferenza, in modo da coprire sia la parte di sopra che di sotto della retta r;

E. Si ripete il procedimento ma invertendo gli estremi del segmento, cioè si punta il compasso in B e si apre fino ad A e si traccia un altro arco di circonferenza.

F. I due archi di circonferenza si incontrano in due punti C e D, la retta s passante per questi due punti è perpendicolare a r

Per tracciare la perpendicolare s a una retta r passante per un punto P (figura 1.54b) si può usare una riga e una squadra. La riga si sovrappone alla retta r, si pone la squadra sulla riga e la si fa scorrere lungo essa fino a che l'altro orlo della squadra non si sovrapponga al punto P; strisciando la matita lungo questo orlo, otteniamo la perpendicolare s richiesta.

Definizione 1.60 (Piede o proiezione)**.** Data una retta r e un punto P qualsiasi, si chiama *piede della perpendicolare* da P a r, o *proiezione* di P su r, il punto di intersezione tra la retta perpendicolare a r passante per P e la retta r stessa (figura 1.52).

Definizione 1.61 (Asse di un segmento)**.** Si chiama *asse di un segmento* la retta perpendicolare al segmento passante per il punto suo punto medio (in figura 1.55 la retta r è asse del segmento AB).

Definizione 1.62 (Distanza di un punto da una retta)**.** Data una retta r è un punto qualsiasi P. Diciamo P' il piede della perpendicolare da P a r. Il segmento PP' si chiama *distanza* del punto P dalla retta r. Vedi figura 1.56.

Figura 1.57: Rette parallele.

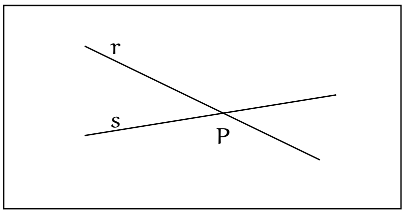


Figura 1.58: Rette incidenti.

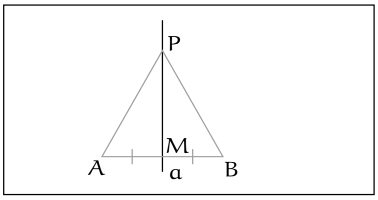


Figura 1.59: L'asse di un segmento è il luogo equidistante dagli estremi.

Osservazione 1.31. Anche la lunghezza $\overline{PP'}$ del segmento PP' si chiama *distanza* di P da r. A seconda del contesto sarà chiaro se ci riferiamo al segmento o alla sua lunghezza.

Ovviamente nel caso in cui P giace su r, si ha che la distanza PP' è il segmento nullo e quindi ha misura zero.

Definizione 1.63 (Rette parallele)**.** Date due rette r e s di uno stesso piano, si dicono *parallele*, e si scrive $r \parallel s$, se non hanno alcun punto in comune (figura 1.57).
Spesso per comodità, due rette coincidenti vengono considerate anch'esse parallele.

Definizione 1.64 (Rette incidenti)**.** Date due rette r e s, si dicono *incidenti* se hanno un sol punto in comune (figura 1.58).

Ovviamente se avessimo due rette con due o più punti comuni queste sarebbero coincidenti, come visto nell'osservazione 1.2 a pagina 5.

1.15 LUOGHI GEOMETRICI

Definizione 1.65 (Luogo geometrico)**.** Si dice *luogo geometrico*, o semplicemente *luogo*, l'insieme di tutti e soli i punti che godono di una data proprietà.

Osservazione 1.32. Per poter affermare che una figura è un luogo di punti occorre dimostrare *dapprima* che ogni punto gode di quella certa proprietà e *successivamente* che, se un punto ha tale proprietà, deve appartenere alla figura.

L'asse di un segmento e la bisettrice di un angolo costituiscono due esempi di luoghi geometrici.

Teorema 1.5 ([18])**.** *Il luogo dei punti di un piano equidistanti da due punti dati è l'asse del segmento che unisce i due punti.*

18 Richiede il teorema 2.18 a pagina 52, e il concetto di simmetria rispetto a un asse del paragrafo 4.5 a pagina 86.

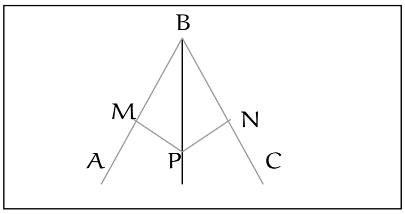


Figura 1.60: La bisettrice è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.

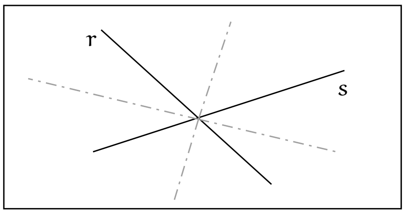


Figura 1.61: Luogo dei punti equidistanti da due rette (r, s) che si intersecano.

Dimostrazione. Sia P un punto che appartiene all'asse a di un segmento AB (figura 1.59); nella simmetria di asse a i segmenti PA e PB si corrispondono, perciò sono congruenti; quindi P è equidistante sia da A che da B.

Viceversa, se P è un punto generico equidistante da A e da B, il triangolo PAB risulta isoscele e, detta PM la bisettrice dell'angolo al vertice $A\hat{P}B$, risulta $AB \perp PM$ e $AM \cong MB$, perché nel triangolo isoscele APB la bisettrice PM è anche altezza e mediana (teorema 2.18 a pagina 52); quindi PM coincide con l'asse del segmento AB e si può così concludere che P è un punto dell'asse AB. □

Teorema 1.6 ([19]). *La bisettrice di un angolo convesso è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.* Vedi figura 1.60.

Dimostrazione. Sia $A\hat{B}C$ un angolo convesso, P un punto della sua bisettrice e PM, PN le distanze rispettivamente dai lati AB e BC (figura 1.60). Il punto M appartiene al lato BA e non al suo prolungamento perché $A\hat{B}P$ è un angolo acuto, essendo la metà di un angolo convesso; analogamente per il punto N. Dalla congruenza dei due triangoli rettangoli MBP e NBP, che hanno l'ipotenusa in comune e $M\hat{B}P \cong P\hat{B}N$ (teorema 2.9 a pagina 47), deriva che $PM \cong PN$; quindi P è equidistante dai lati degli angoli.

Viceversa, sia P un generico punto del piano equidistante dai lati dell'angolo, cioè condotte da P le perpendicolari PM a BA e PN a BC sia $PM \cong PN$. Si congiunga P con B e si considerino i triangoli rettangoli PMB e PNB, che, per avere l'ipotenusa in comune e congruenti i cateti PM e PN, risultano congruenti (teorema 2.9 a pagina 47). Si può così dedurre che $P\hat{B}M \cong P\hat{B}N$, da cui PB risulta bisettrice dell'angolo ABC: si conclude così che P giace sulla bisettrice dell'angolo dato. □

Proposizione 1.13. *Il luogo dei punti di un piano equidistanti da due rette che si intersecano è costituito dalle due bisettrici degli angoli da esse formati. E queste bisettrici risultano perpendicolari tra loro.* Vedi figura 1.61.

Dimostrazione. Quando due rette r, s, di un piano si intersecano formano quattro angoli a due a due opposti al vertice. La retta bisettrice di uno di uno dei quattro angoli è anche bisettrice del suo angolo opposto al vertice (perché, per il teorema 1.3 a pagina 29, angoli opposti al vertice sono congruenti) e visto che per il teorema 1.6 è anche il luogo equidistante dai lati dell'angolo vuol dire che il luogo equidistante dalle rette r e s. Stesso discorso per la bisettrice degli altri due angoli. □

19 Richiede i criteri di congruenza dei triangoli, in particolare il teorema 2.9.

1.16 RIASSUNTO

In geometria si presentano diversi concetti primitivi: *spazio*, *punto*, *figura* (un insieme di punti), *linea* o *curva*, *retta* (un insieme infinito di punti allineati senza origine né fine), *superficie*, *piano* (vedi figure 1.1, 1.2).

In geometria più che di uguaglianza tra figure si parla di *congruenza*: due figure sono *congruenti* se a seguito di uno spostamento e/o una rotazione si possono portare l'una sull'altra combaciando perfettamente (figura 1.28).

Il *segmento* è una parte di retta compresa tra due punti, mentre la *semiretta* è una parte di retta con origine ma senza fine. Il punto che divide un segmento in due parti congruenti si chiama *punto medio*.

Due segmenti si dicono *consecutivi* se hanno un estremo in comune mentre si dicono *adiacenti* se in più giacciono sulla stessa retta (figure 1.30, 1.31).

L'unità di misura di segmenti e curve nel Sistema Internazionale è il *metro* (m).

Per due punti dello spazio passa una e una sola retta (*postulato della retta*, vedi figura 1.5), mentre per tre punti dello spazio non allineati passa uno e un solo piano (*postulato fondamentale del piano*, vedi figura 1.6).

Una curva si dice *sghemba* se i suoi punti non stanno tutti in un piano, altrimenti si dice *piana* (figura 1.10). Oltre alle curve aperte e chiuse (figure 1.12) si definiscono le curve semplice e intrecciata (figura 1.13).

Una figura si dice *convessa* se unendo con un segmento due punti del suo contorno il segmento è tutto interno alla figura, altrimenti si dice *concava* (figura 1.19).

Un *angolo (piano)* è la regione compresa tra due semirette di stessa origine. In particolare la regione dove si trovano i prolungamenti delle semirette si chiama angolo *concavo*, l'altra angolo *convesso* (figura 1.20). Salvo avviso contrario ci si riferisce sempre all'angolo convesso.

Un angolo *piatto* è quello compreso tra due semirette opposte, un angolo *giro* è l'unione di due angoli piatti e un angolo *retto* è la metà di un angolo piatto (figura 1.22). La *bisettrice* di un angolo è la semiretta (o retta) che divide l'angolo in due parti uguali (figura 1.25).

La grandezza di un angolo si chiama *ampiezza*, ci sono diverse unità di misura degli angoli, una molta adoperata è il *grado sessagesimale* che rappresenta la 360-esima parte dell'angolo giro, un grado sessagesimali si indica con $1°$. La sessantesima parte di $1°$ si chiama *primo* e si indica con $1'$, mentre la sessantesima parte di un primo si chiama *secondo* indica con $1''$. Si può ovviamente adoperare una notazione decimale per indicare l'ampiezza, per esempio $24.63°$. L'angolo giro, piatto, retto misurano rispettivamente $360°$, $180°$, $90°$.

Due angoli si dicono *esplementari* se la loro somma è un angolo giro (figura 1.40), si dicono *supplementari* se la loro somma è un angolo piatto (figura 1.41), si dicono *complementari* se la loro somma è un angolo retto (figura 1.42).

Un angolo minore di un angolo retto si dice *acuto*, maggiore si dice *ottuso* (figura 1.43).

Una *spezzata* o *poligonale* è l'unione di più segmenti consecutivi. La regione finita delimitata da una spezzata semplice (ciè non intrecciata) chiusa si chiama *poligono* (figura 1.45). Un poligono si dice *convesso* se prolungando ogni suo lato esso giace tutto da una stessa parte (per esempio tutto a destra o a sinistra), altrimenti si dice *concavo* (figura 1.46). Un poligono ha sempre lo stesso numero di angoli e lati.

I poligoni (convessi) di tre, quattro, cinque, sei, eccetera si chiamano rispettivamente *triangolo*, *quadrangolo*, *pentagono*, *esagono*, eccetera. I lati o angoli di un poligono si chiamano *lati*. Il segmento che unisce due vertici non consecutivi si chiama *diagonale*.

Due rette si dicono *perpendicolari*, *normali* o *ortogonali* e si scrive $r \perp s$ quando formano tra esse quattro angoli retti, altrimenti si dicono *oblique* (figure 1.49, 1.50).

La *distanza* di un punto P da una retta r è il segmento (o la sua lunghezza) che congiunge il punto P al punto P' intersezione tra la retta perpendicolare a r e r stessa (figura 1.56). Il punto P' è detto *piede* della perpendicolare ad r (figura 1.52).

Due rette di uno stesso piano si dicono *parallele* se non si incontrano mai o sono coincidenti, si scrive $r \parallel s$ (figura 1.57). Se si incontrano (in un sol punto) si dicono *incidenti* (figura 1.58).

Si chiama *luogo (geometrico)* l'insieme dei punti che godono di una certa proprietà. Ad esempio il luogo di un piano equidistante da due punti è l'asse del segmento che congiunge quei due punti (figura 1.59). Il luogo dei punti equidistante dai lati di un angolo è la bisettrice dell'angolo (figura 1.60).