

Ivan Gentile  
*Matematica per Molti - Volume 1*  
Copyright© 2018, 1<sup>a</sup> edizione

#### COLOPHON

Nessuna parte di questa pubblicazione può essere, tradotta, riprodotta o trasmessa senza l'autorizzazione dell'autore. Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% del volume. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale possono avvenire, per un numero di pagine non superiori al 15% del volume, solo a seguito di specifica autorizzazione dell'autore.

Questo lavoro è stato realizzato con  $\text{\LaTeX}$ .

I nomi commerciali, i loghi e i marchi registrati menzionati nel testo appartengono ai rispettivi proprietari.

Nel frontespizio è riprodotto il logo di *Matematica per Molti* di proprietà di Ivan Gentile.

#### CONTATTI

<http://www.matematicaxmolti.it> - Sito ufficiale

[info@matematicaxmolti.it](mailto:info@matematicaxmolti.it) - Email per informazioni

I. Gentile<sup>©</sup>

Non esistono cose facili o cose difficili, esistono solo cose spiegate bene o cose spiegate male.

— Scipione Bobbio

A chi ha voglia di fare.

L. Gentile<sup>©</sup>

I. Gentile<sup>©</sup>

# INDICE

PREFAZIONE	xi
INTRODUZIONE	xv
1 ARITMETICA	1
1.1	Il concetto di numero 1
1.2	Il sistema di numerazione decimale 2
1.3	Simboli di relazioni e quantificatori 3
1.4	Le quattro operazioni 5
1.4.1	Addizione 5
1.4.2	Moltiplicazione 7
1.4.3	Sottrazione 10
1.4.4	Divisione 11
1.5	Somma algebrica 14
1.6	Potenza 14
1.7	Espressione aritmetica 16
1.8	Membri 18
1.9	Divisibilità e numeri primi 19
1.9.1	Criteri di divisibilità 19
1.9.2	Numeri primi 22
1.9.3	Massimo comune divisore e minimo comune multi- plo 26
1.10	Numeri decimali o frazionari 30
1.11	Numeri relativi 32
1.11.1	Operazioni 33
1.12	Numeri razionali 35
1.12.1	Definizioni e confronti 38
1.12.2	Operazioni 41
1.12.3	Proprietà 43
1.13	Notazioni degli insiemi numerici 46
1.14	Altre definizioni sui numeri 47
1.15	Radice e potenza 48
1.16	Osservazioni sulle potenze di 10 50
1.17	Passaggio tra rappresentazioni 51
1.17.1	Calcolo della frazione generatrice 54
1.18	Svolgere "a mano" le operazioni 56
1.18.1	Addizione 56
1.18.2	Sottrazione 57
1.18.3	Moltiplicazione 58
1.18.4	Divisione 59
1.19	Curiosità 63
1.19.1	Perché meno per meno fa più? 64
1.19.2	Numeri interessanti 64
2 LOGICA	67
2.1	Proposizioni o enunciati 67
2.2	Operazioni con le proposizioni 68
2.2.1	Congiunzione 69
2.2.2	Disgiunzione 69
2.2.3	Negazione 70
2.3	Logica e linguaggio comune 72

2.4	Implicazione e complicazione materiale	74
2.4.1	Implicazione	74
2.4.2	Coimplicazione materiale	75
2.5	Formule proposizionali	77
2.5.1	Formule equiveridiche o equivalenti	78
2.5.2	Tautologie e contraddizioni	78
2.6	Proprietà delle operazioni logiche	82
2.7	Predicati	83
2.7.1	Operazioni logiche	83
2.7.2	Predicati e quantificatori	84
2.8	Implicazione ed equivalenza logica	86
2.8.1	Equivalenza logica	87
2.8.2	Condizione necessaria e sufficiente	88
2.9	Riassunto	89
3	INSIEMI	93
3.1	Il concetto di insieme	93
3.1.1	Appartenenza	93
3.1.2	Rappresentazione di un insieme	94
3.1.3	Insiemi uguali	96
3.1.4	Insieme vuoto	96
3.1.5	Insieme ambiente o universo	96
3.1.6	Insieme di insiemi	97
3.1.7	Sottoinsieme	97
3.1.8	Insieme delle parti	99
3.2	Operazioni fra insiemi	102
3.2.1	Proprietà	104
3.3	Prodotto cartesiano e n-ple	109
3.4	Riassunto	111
4	I NUMERI REALI	115
4.1	Perché i numeri reali?	115
4.1.1	Algoritmo euclideo	115
4.1.2	Grandezze commensurabili	118
4.1.3	Questione geometrica	119
4.1.4	Questione algebrica	120
4.1.5	Struttura di un numero reale	121
4.2	Confronti e relazioni	121
4.3	Insieme dei reali	122
4.4	Operazioni e proprietà dei numeri reali	122
4.4.1	Monotonia delle potenze	124
4.4.2	Potenze a esponente reale	126
4.4.3	Uguaglianza tra potenze e basi	126
4.5	Definizioni relative ai numeri reali	126
4.6	Rappresentazione geometrica	129
4.7	Notazioni scientifica ed esponenziale	131
4.8	Approssimazioni	133
4.9	Fattoriale e coefficiente binomiale	135
4.10	Sommatoria e Produttoria	137
5	MONOMI E POLINOMI	139
5.1	Espressioni letterali ed Algebra	139
5.2	Monomi	139
5.3	Operazioni con i monomi	142
5.3.1	Somma	142
5.3.2	Prodotto e potenza	143

5.3.3	Divisione	144
5.4	Divisibilità tra monomi	145
5.4.1	Massimo comune divisore e minimo comune multi- plo	146
5.5	Polinomi	148
5.6	Polinomi come funzioni	151
5.7	Operazioni coi polinomi	153
5.7.1	Somma	154
5.7.2	Prodotto e potenza	154
5.7.3	Divisione	156
5.8	Prodotti notevoli e scomposizione in fattori	157
5.8.1	Prodotti notevoli	157
5.8.2	Scomposizione in fattori	162
5.9	Divisibilità tra polinomi	163
5.9.1	Divisibilità tra un polinomio e un monomio	169
5.9.2	Divisibilità per un binomio di primo grado	170
5.10	Divisori e multipli comuni di polinomi	183
5.11	Semplificare frazioni algebriche	185
5.12	Riassunto	188
5.12.1	Monomi	188
5.12.2	Polinomi	189
5.12.3	Prodotti notevoli e scomposizioni in fattori	190
5.12.4	Divisione e divisibilità tra polinomi	191
5.12.5	Operazioni tra frazioni	192
6	RADICALI	193
6.1	Richiami e approfondimenti	193
6.2	Proprietà	193
6.3	Radicali simili	200
6.4	Razionalizzazione di una frazione	201
6.5	Radicali doppi	204
6.6	Riassunto	206
7	EQUAZIONI	209
7.1	Identità ed equazioni	209
7.2	Tipi di equazioni	211
7.3	Equivalenza tra equazioni	212
7.3.1	Primo principio di equivalenza	213
7.3.2	Secondo principio di equivalenza	214
7.4	Classificazione delle equazioni	218
7.4.1	Grado di un'equazione	219
7.5	Curiosità	221
7.5.1	L'ultimo teorema di Fermat	221
7.5.2	Congettura di Eulero	222
7.6	Riassunto	223
8	RISOLUZIONE DI EQUAZIONI	225
8.1	Introduzione ai numeri complessi	225
8.2	Radici di un polinomio	228
8.3	Il problema delle soluzioni	230
8.4	Equazioni razionali intere di primo grado	232
8.4.1	Risoluzione	232
8.4.2	Equazioni letterali	236
8.5	Proporzioni e percentuali	238
8.5.1	Proporzione	238
8.5.2	Percentuale	240

8.6	Grandezze proporzionali	241
8.7	Sistemi di equazioni di primo grado	242
8.7.1	Principi di riduzione e sostituzione	244
8.7.2	Risoluzione	246
8.8	Equazioni razionali intere di secondo grado	252
8.8.1	Risoluzione	253
8.8.2	Relazioni fra coefficienti e soluzioni	257
8.8.3	Equazioni parametriche	263
8.9	Equazioni frazionarie	264
8.10	Equazioni razionali intere di terzo grado	268
8.10.1	Equazioni binomie di terzo grado	268
8.10.2	Equazioni reciproche di terzo grado	269
8.11	Equazioni razionali intere di quarto grado	271
8.11.1	Equazioni binomie di quarto grado	271
8.11.2	Equazioni biquadratiche	273
8.11.3	Equazioni reciproche di quarto grado	274
8.12	Equazioni razionali di grado superiore al quarto	276
8.13	Equazioni col valore assoluto	279
8.14	Equazioni irrazionali	282
8.15	Numeri algebrici e trascendenti	285
8.16	Riassunto	286
9	DISEQUAZIONI	289
9.1	Disuguaglianze	289
9.2	Disequazioni	290
9.2.1	Principi	291
9.3	Classificazione delle disequazioni	294
9.3.1	Grado di una disequazione	295
9.4	Riassunto	296
10	RISOLUZIONE DI DISEQUAZIONI	299
10.1	Disequazioni razionali intere di primo grado	299
10.1.1	Risoluzione	299
10.1.2	Disequazioni letterali	301
10.2	Sistemi di disequazioni	303
10.3	Disequazioni razionali intere di secondo grado	306
10.3.1	Segno di un trinomio di secondo grado	306
10.3.2	Disequazioni parametriche	310
10.4	Disequazioni frazionarie	314
10.5	Disequazioni razionali di grado superiore al secondo	318
10.6	Disequazioni con valore assoluto	324
10.7	Disequazioni irrazionali	328
10.8	Riassunto	337
A	LE BASI DI UNA SCIENZA	339
A.1	Grandezze fisiche e loro misura	339
A.2	Teoria scientifica	343
A.2.1	Metodo scientifico	344
B	ALTRI SISTEMI DI NUMERAZIONE	345
B.1	Il sistema binario	345
B.1.1	Conversione da binario a decimale	348
B.1.2	Conversione da decimale a binario	349
B.2	Sistemi ottale ed esadecimale	351
B.2.1	Conversione da ottale a decimale	351
B.2.2	Conversione da decimale a ottale	352
B.2.3	Conversione da ottale a binario e viceversa	353

B.2.4	Conversione da esadecimale a decimale	354
B.2.5	Conversione da decimale a esadecimale	354
B.2.6	Conversione da esadecimale a binario e viceversa	355
B.3	Considerazioni sulle conversioni	356
B.4	Operazioni con numeri binari	357
B.4.1	Somma	357
B.4.2	Sottrazione	359
B.4.3	Moltiplicazione	360
B.5	Numeri interi relativi	361
B.5.1	Rappresentazione con modulo e segno	361
B.5.2	Rappresentazione alla base diminuita	362
B.5.3	Rappresentazione alla base	365
BIBLIOGRAFIA		369
INDICE ANALITICO		371

I. Gentile<sup>©</sup>

I. Gentile<sup>©</sup>

## PREFAZIONE

*Matematica per Molti* è una collana di cinque volumi rivolta a chi desidera imparare una buona fetta di matematica senza alcuna conoscenza pregressa. Può interessare

- *studenti* di scuola secondaria o dei primi anni di università (qualsiasi esse siano),
- *autodidatti*: chi ha sempre voluto imparare in maniera sistematica la matematica ma non sa da cominciare,
- *docenti*, che hanno bisogno di un supporto da tirare fuori in qualsiasi momento per ricordare una formula o un argomento specifico.

La collana andrebbe vista nel suo insieme, la divisione in più volumi è dovuta esclusivamente a ragioni pratiche; fare un solo libro di 2000 pagine sarebbe stato poco fruibile.

Il filosofo medioevale Averroè diceva che chiunque scrive un'opera dovrebbe scriverla almeno tre volte: una per i colleghi, una per gli allievi e una per il popolo. Spero di soddisfare almeno le esigenze dei colleghi e degli allievi, sarebbe troppo dire che è anche per il popolo.

Non sono un matematico ma semplicemente un *utente* della matematica, che ha visto e vede continuamente l'importanza di questa disciplina in tutti i campi della scienza e della tecnica. Se nel *merito* non propongo nulla di nuovo spero di proporlo nel *metodo* consentendo al lettore di apprendere più rapidamente e meglio i tanti argomenti proposti.

Mi sono posto i seguenti obiettivi

- *Partire da zero*: chi legge i libri partendo dall'inizio del primo non deve avere alcuna conoscenza pregressa di matematica.
- *Sequenzialità*: ogni capitolo (o paragrafo) si basa *solo* su concetti espressi nei capitoli (o paragrafi) precedenti, salvo rari e piccoli casi opportunamente segnalati.<sup>1</sup>
- *Semplicità e rigore*: partendo dal vincolo di affrontare gli argomenti in maniera rigorosa con il giusto formalismo matematico (ma senza esagerare), ho cercato di esprimerli nella maniera più semplice possibile ricorrendo a parole, simboli, figure.
- *Multidisciplinarietà*: di ogni argomento è indicato il suo utilizzo nella realtà pratica, in questo modo sono presenti diversi argomenti che non trovano, o hanno poco spazio, nei classici corsi di matematica.
- *Immediatezza*: alla fine di ogni capitolo c'è un riassunto adatto a chi non vuole studiare tutto il capitolo ma ha bisogno di avere una "infarinatura" o una "rinfrescata" per passare poi a un argomento successivo.
- *Brevità*: cercare di non ripetere più volte lo stesso concetto, in modo da focalizzare un solo punto in cui è ben spiegato; questo, oltre a rendere più snelli i libri contribuisce anche facilitarne la memorizzazione.

<sup>1</sup> La caratteristica della sequenzialità può sembrare banale da ottenere ma non è affatto così; la matematica nel corso della storia ha avuto uno sviluppo tutt'altro che lineare.

Cercare di conciliare tutti gli obiettivi indicati è stato il lavoro più difficile ed è un lavoro che necessariamente si è sviluppato negli anni, conoscendo, infatti, diverse materie tecnico/scientifiche si riesce ad avere un quadro *multidisciplinare*, o ancora, la *semplicità* si ottiene anche rileggendo le stesse cose dopo molto tempo per vedere se sono immediatamente chiare.

Ritengo che le difficoltà in matematica di molti studenti siano dovute al fatto che il materiale a loro disposizione non rispetta uno più degli obiettivi indicati prima. Ad esempio, uno studente ha difficoltà a capire i limiti perché non ha chiaro o ha dimenticato il concetto di punto di accumulazione, di intorno o definizioni sulle funzioni. Ecco l'utilità di avere a portata di mano un unico riferimento in cui sono presenti tutti gli argomenti con un solo formalismo e con il giusto compromesso rigore/semplicità.

Riguardo i tempi di apprendimento: di sicuro la matematica in molti concetti non è una disciplina intuitiva, l'uomo ha impiegato più di duemila anni per arrivare ad inquadrare in maniera sistematica e rigorosa gli argomenti di questi libri. Gli argomenti vanno letti e riletti tante volte anche a distanza di tempo, vanno possibilmente scritti a libro chiuso per verificare una corretta comprensione e vanno fatti gli esercizi; ci vuole concentrazione, non abbiate fretta.

Inizialmente avevo previsto una collana di quattro volumi, ma mi sono accorto che il primo volume era troppo ingombrante (circa 640 pagine) e quindi poco fruibile, di conseguenza l'ho diviso in 2, dunque nelle edizioni del 2018 quello che precedentemente era il volume 2 è diventato il volume 3, il volume 3 è diventato il volume 4 e ovviamente il 4 è diventato il 5. Ho approfittato di questa divisione per inserire qualche piccolo argomento o curiosità in più, per dettagli del confronto tra le versioni fare riferimento al sito [matematicaxmolti.it](http://matematicaxmolti.it); comunque chi, prima di settembre 2018, ha acquistato i volumi 1, 2, 4 (il 3 non era stato pubblicato) non deve ricomprare gli attuali volumi 1, 2, 3, 5, basta che acquisti il 4 (che poi sarebbe quello che doveva essere il 3) per completare la collana, perché, a parte correzioni di piccoli errori, le modifiche e aggiunte sono molto marginali.

Settembre 2018

Ivan Gentile.

## RINGRAZIAMENTI

Per i ringraziamenti preferisco partire dalla mia professoressa di Analisi Matematica dell'Università, a cui devo una gran parte delle mie conoscenze matematiche. Il suo contributo sarà più evidente nei volumi successivi, in cui ci saranno gli argomenti che spiegava nei suoi corsi; tuttavia, i suoi insegnamenti sono in qualche modo presenti anche in questo libro, visto che ha profondamente formato e influenzato il mio approccio allo studio di qualunque disciplina. Probabilmente se avessi avuto un altro docente questo libro non sarebbe mai nato.

Un ringraziamento va anche agli autori dei testi presenti in bibliografia, in particolare al [5] da cui ho attinto molto per la stesura di questo volume.

Infine, ringrazio la comunità di  $\text{\LaTeX}$  sparsa nel mondo che mi ha permesso di scrivere il libro in formato digitale e in particolare il  $\text{\GJIT}$  (Gruppo Utilizzatori Italiani di  $\text{\TeX}$ ) che mi ha fornito un aiuto fondamentale all'organizzazione del layout del libro.

*Settembre 2018*

I. G.

I. Gentile<sup>©</sup>

I. Gentile<sup>©</sup>

# INTRODUZIONE

Il libro tratta dell'Algebra di base, tali argomenti sono estremamente collegati a quelli di Geometria di base presenti nel volume 2, infatti nelle edizioni precedenti costituivano un solo volume.

Se tutti questi termini non vi dicono niente non abbiate paura: il libro è qui per spiegarveli. Basta partire dal primo capitolo e procedere in sequenza; in ogni capitolo troverete suggerimenti su cosa approfondire, su cosa (almeno in un primo momento) tralasciare ed eventuali rimandi ad altre parti del libro. Ultime ma non ultime sono le appendici; sono brevi rispetto al resto del libro ma importanti in quanto trattano aspetti affrontati poco e male in molti testi anche voluminosi di matematica; ho cercato di metterci la mia formazione ingegneristica. L'appendice A va letta, almeno con una prima lettura, prima del capitolo 1, mentre l'appendice B è facoltativa anche se consiglio fortemente di impararla e lo si può fare già dopo il capitolo 1.

Nel testo si adottano diverse convenzioni che è utile specificare:

- Teoremi di dimostrazione non molto lunga, li ho indicati semplicemente come "proposizioni".
- Le parentesi quadre nel testo indicano delle parole lette in alternativa a quelle immediatamente precedenti; ad esempio, scrivendo

L'unione [intersezione] di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.

si intende che valgono entrambe le seguenti affermazioni

- L'unione di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.
- L'intersezione di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.

In pratica è un modo per abbreviare le cose.

- Le soluzioni degli esercizi (laddove presenti) sono indicate tra parentesi quadre sul margine destro o sul margine sinistro in una riga in cui è presente solo la soluzione. Se volete indicazioni o soluzioni degli esercizi (mi rivolgo soprattutto ai docenti) contattatemi all'indirizzo [info@matematicaxmolti.it](mailto:info@matematicaxmolti.it).

In matematica si usano, per tradizione, molte lettere greche che mano mano è necessario imparare, alla fine di questa introduzione troverete una tabella che raccoglie i simboli e i relativi nomi.<sup>2</sup>

La matematica è anche ricca di altri simboli che sono abbreviazioni di locuzioni, li vedremo mano mano che saranno introdotti; tuttavia, ho preferito raccogliarli nella seconda tabella alla fine di questa introduzione in modo da consultarla subito se dovesse capitare di ritrovare un simbolo di

<sup>2</sup> A scopo puramente informativo, l'ordine alfabeto delle lettere nella tabella è verticale, cioè  $\alpha$  è la prima lettera dell'alfabeto,  $\beta$  la seconda,  $\gamma$  la terza e così via; inoltre alcune lettere mancano o manca la loro forma maiuscola in quanto non sono adoperate avendo un simbolo praticamente identico a quello di lettere del nostro alfabeto, ad esempio alpha maiuscola ha simbolo che praticamente coincide con la "A".

cui non si ricorda il significato. A tal proposito segnaliamo che la negazione dei simboli si ottiene, spesso, ponendo una linea in diagonale, ad esempio  $\neq$  significa “diverso”, mentre per gli insiemi numerici il pedice 0 indica che in esso è compreso anche lo zero (ad esempio  $\mathbb{N}_0$ ), mentre gli apici + e - indicano, rispettivamente, solo i numeri positivi o negativi (ad esempio  $\mathbb{R}^+$ ).

Infine, non vi scoraggiate dalla lunghezza del libro, perché, a mio avviso, molte dimostrazioni si possono saltare e molte altre solo leggere e poi se siete a corto di tempo partite con leggere direttamente il riassunto del capitolo ed eventualmente approfondire qualche argomento meno chiaro o che proprio vi serve.

Buona matematica!

#### Lettere Greche.

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$\alpha$	alpha	$\nu$	ni
$\beta$	beta	$\xi$	xi (minuscolo)
$\gamma$	gamma (minuscola)	$\Xi$	xi (maiuscolo)
$\Gamma$	gamma (maiuscola)	$\pi$	pi (greco minuscolo)
$\delta$	delta (minuscola)	$\Phi$	pi (greco maiuscolo)
$\Delta$	delta (maiuscola)	$\rho$	rò
$\varepsilon$	epsilon	$\sigma$	sigma
$\zeta$	zita	$\Sigma$	Sigma (maiuscolo)
$\eta$	eta	$\tau$	tau
$\theta$	theta (minuscola)	$\varphi$	phi (minuscolo)
$\Theta$	theta (maiuscola)	$\Phi$	phi (maiuscolo)
$\iota$	iota	$\psi$	psi (minuscolo)
$\kappa$	kappa	$\Psi$	psi (maiuscolo)
$\lambda$	lambda (minuscola)	$\omega$	omega (minuscolo)
$\Lambda$	lambda (maiuscola)	$\Omega$	omega (maiuscolo)
$\mu$	mu		

Simboli Matematici.

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
+	somma	−	sottrazione
·	prodotto	×	prodotto
/	divisione	÷	divisione
$\sum$	sommatoria	$\prod$	produttoria
$\sqrt{\quad}$	radice quadrata	$\sqrt[n]{\quad}$	radice n-esima
=	uguale	$\approx$	circa uguale
$\triangleq$	uguale per definizione		
<	minore	$\leq$	minore o uguale
>	maggiore	$\geq$	maggiore o uguale
$\ll$	molto minore	$\gg$	molto maggiore
	tale che	:	tale che, divisione
$\equiv$	equivale	$\in$	appartiene
$\emptyset$	insieme vuoto	$\infty$	infinito
$\exists$	esiste	$!\exists$	esiste ed è unico
$\cup$	unione	$\cap$	intersezione
$\setminus$	differenza (tra insiemi)	$\complement$	complemento
$\subset$	incluso	$\supset$	include
$\subseteq$	incluso non strettamente	$\supseteq$	include non strettamente
$\mathbb{N}$	insieme dei naturali	$\mathbb{Z}$	insieme degli interi
$\mathbb{P}$	numeri pari	$\mathbb{D}$	numeri dispari
$\mathbb{Q}$	numeri razionali	$\mathbb{R}$	numeri reali
$\mathbb{C}$	numeri complessi	$\mathbb{I}$	numeri immaginari
$\widehat{AB}$	arco tra A e B	$\widehat{ab}$	angolo tra a e b
$\longleftrightarrow$	implicazione materiale	$\longleftrightarrow$	coimplicazione materiale
$\implies$	implica	$\implies$	implica
$\iff$	equivale, se e solo se	$\iff$	equivale, se e solo se
$\forall$	per ogni, qualunque	$\neg$	negazione
$\vee$	disgiunzione, or	$\wedge$	congiunzione, and
Re	parte reale	Im	parte immaginaria
$ x $	valore assoluto di x	$ \vec{v} $	modulo del vettore $\vec{v}$
$\overline{AB}$	misura del segmento AB		
$\cong$	congruente	$\equiv$	superfici equivalenti