4 I NUMERI REALI

Questo capitolo è dedicato ai numeri reali, l'insieme numerico più importante in matematica. I numeri reali sono quelli a cui si fa implicitamente riferimento quando si parla semplicemente di "numero".

Sarò abbastanza breve in quanto molte definizioni sono estensioni di quelle già viste per altri insiemi numerici, per tale motivo non c'è un paragrafo riassuntivo finale; vi tocca studiarvelo tutto, potete risparmiare solo le dimostrazioni e, come ora diremo, il paragrafo 4.1. Anche esercizi ce ne sono ben pochi perché sono già stati fatti nel capitolo 1 e saranno fatti nei capitoli successivi.

Come insiemi numerici, fino ad ora, abbiamo visto i numeri naturali, interi e razionali, e per ogni uno di essi abbiamo dato le motivazioni che portano alla sua introduzione. Anche i numeri reali sono stati introdotti per motivi ben precisi che sono analizzati nel prossimo paragrafo. Il problema è che il paragrafo 4.1 può apparire ostico soprattutto perché fa riferimento a concetti di geometria e di algebra che, benché semplici, non abbiamo ancora affrontato. Se siete proprio messi male con la geometria elementare e con l'algebra delle scuole medie, o semplicemente andate di fretta allora potete accontentarvi della definizione approssimata che darò ora e saltare (per il momento, poi ogni tanto ritornateci perché interessante) il paragrafo 4.1.

Da problemi geometrici o numerici può capitare che vengono fuori numeri decimali con un numero infinito di cifre dopo il separatore decimale, la cui generica di queste cifre, diversamente dai numeri periodici, non è nota a priori ma per conoscerla bisogna svolgere materialmente delle operazioni matematiche. Questi numeri si chiamano *numeri irrazionali* e l'insieme dei numeri irrazionali unito con quello dei numeri razionali (quindi con i numeri che hanno una rappresentazione decimale finita o infinita ma periodica) si chiama *insieme dei numeri reali* e si indica con $\mathbb{R}$. Quindi un numero reale è un numero irrazionale o razionale. Una cosa importante da ricordare è che le frazioni (a/b) sono sempre numeri razionali, gli irrazionali vengono fuori da altre operazioni.

Anche le poche dimostrazioni presente in questo capitolo è meglio, per il momento, saltarle se non conoscente le basi delle equazioni e disequazioni.

4.1 PERCHÉ I NUMERI REALI?

Per introdurre i numeri irrazionali e di conseguenza i numeri reali bisogna partire dall'algoritmo euclideo che permette di trovare il massimo comune divisore tra due numeri, poi si vede che in realtà non tutte le quantità hanno un massimo comune divisore e quindi si amplia l'insieme dei numeri razionali arrivando ai reali.

4.1.1 Algoritmo euclideo

Dati due numeri naturali x e y, il seguente procedimento noto come *algoritmo euclideo* consente di determinare il mcd tra x e y; per fissare le idee supponiamo $x > y$ (se $x = y$ il mcd è proprio tale numero)

- Si effettua la divisione tra x e y, indicando q_0 e r_0 rispettivamente quoziente e resto si ha

$$x = q_0 y + r_0 \qquad 0 \leqslant r_0 < y \tag{4.1}$$

- Divisore e resto diventano rispettivamente il dividendo e il divisore di un'altra divisione, cioè si fa y/r_0

$$y = q_1 r_0 + r_1 \qquad 0 \leqslant r_1 < r_0$$

- Il procedimento continua fino ad ottenere un resto resto nullo cosa che sicuramente avviene in quanto il resto va sempre a diminuire visto che non può superare il divisore e questo va sempre a diminuire, quindi nella terza divisione si avrà

$$r_0 = q_2 r_1 + r_2$$

  e nella n-esima divisione si avrà

$$r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2}$$

  Il mcd sarà pari a r_{n-2} cioè l'ultimo divisore.

Dimostrazione. È chiaro che se nella divisione tra x e y abbiamo resto nullo allora il mcd è proprio y (il divisore), se così non è otteniamo un resto $r_0 > 0$. Osserviamo che un divisore comune ad x e y è comune anche ad y e r_0, infatti dire che x e y hanno un divisore comune d significa dire che

$$x = ad, \qquad y = bd$$

con a e b numeri naturali, ora sostituendo nella (4.1)

$$ad = q_0 bd + r_0 \iff r_0 = (a - q_0 b)d$$

come si vede d è anche divisore di r_0, dunque possiamo fare la divisione tra y e r_0, e così via divisione tra divisore e resto della divisione precedente. Siccome il divisore di queste divisioni successive è sempre più piccolo (in quanto è un resto della divisione precedente e il resto tende sempre a diminuire) anche il resto tende a diminuire e quindi il procedimento sicuramente prima o poi termina. □

Osservazione 4.1. L'algoritmo si può applicare, e produce lo stesso risultato, anche se si procede a y/x cioè se si divide il numero più piccolo per il numero più grande (anche se non conviene perché viene un passaggio in più) infatti essendo $y < x$ la prima divisione darà quoziente 0 e resto y e quindi la successiva sarà x/y.

Osservazione 4.2. L'algoritmo di Euclide è stato chiamato da Fermat anche *metodo della discesa* in quanto le divisioni successive coinvolgono numeri sempre più piccoli.

Esempio 4.1. Calcola il mcd tra 12 e 8 con l'algoritmo di Euclide

Soluzione. Facciamo la divisione tra 12 e 8

$$12 = 1 \cdot 8 + 4$$

essendo il resto $4 \neq 0$, procediamo con una nuova divisione tra 8 e 4

$$8 = 2 \cdot 4$$

siccome il resto è nullo, l'ultimo divisore 4 è proprio il mcd tra 12 e 8. Notiamo che il risultato era lo stesso se si partiva dalla divisione di 8/12, infatti

$$\begin{aligned} 8 &= 0 \cdot 12 + 8 \\ 12 &= 1 \cdot 8 + 4 \\ 8 &= 2 \cdot 4 \end{aligned}$$

L'utilità del calcolo del massimo comune divisore sta nel fatto di ricondurre una frazione ai minimi termini cioè trovare una frazione equivalente a quella data che ha pero il numeratore e denominatore più piccoli possibili (basta dividere come sappiamo numeratore e denominatore per il loro mcd).

Con un procedimento facile ma un po' lunghetto, che se volete trovate in [3], si dimostra che il porecedimento di Euclide genera una successione di frazioni x_k/y_k che sono alternativamente una apporssiamzione per difetto e una per eccesso del numero x/y e i cui termini sono

$$\begin{aligned} x_0 &= q_0, & y_0 &= 1 \\ x_1 &= q_0 q_2 + 1, & y_1 &= q_1 \\ x_2 &= q_0(q_1 q_2 + 1), & y_2 &= q_1 q_2 + 1 \\ &\dots \\ x_k &= q_k x_{k-1} + x_{k-2}, & y_k &= q_k y_{k-1} + y_{k-2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

e da tali termini si può calcolare il resto k-esimo r_k

$$r_k = (-1)^{k+1}(x_k y - y_k x)$$

Più precisamente queste le successioni di indice pari $(0, 2, 4, \dots)$ approssimano per difetto e quelle di indice dispari $(1, 3, \dots)$ per eccesso

$$\frac{x_0}{y_0} < \frac{x_2}{y_2} < \frac{x_4}{y_4} < \cdots < \frac{x}{y} < \dots \frac{x_5}{y_5} < \frac{x_3}{y_3} < \frac{x_1}{y_1}$$

Presi due qualunque numeri naturali x e y la successione vista x_k/y_k come detto converge prima o poi a x/y, quindi gli antichi pensavano che esistevano solo i numeri naturali e i rapporti di essi (cioè i numeri razionali), infatti i pitagorici mettevano il numero al centro dell'Universo nel senso che per loro tutto era numero e tutto è esprimibile con numeri razionali.

Tuttavia gli stessi pitagorici scoprirono che in realtà non tutto è numero razionale, nel senso che esistono grandezze la cui misura non è esprimibile attraverso un numero razionale. Si accorsero infatti che il rapporto tra diagonale e lato di un pentagono regolare non è esprimibile con un numero razionale, cioè il rapporto tra la lunghezza della diagonale e la lunghezza di un lato di un pentagono regolare non è pari a nessun rapporto tra numeri interi. Anche il rapporto tra diagonale e lato di un quadrato non è esprimibile con numeri razionali. Tali aspetti li tratteremo nel volume 2 (paragrafo 8.10) in cui appunto parleremo di geometria, quindi per ora prendeteli per buoni. Ora con la seguente proposizione vedremo solo l'aspetto sotto forma algebrica.

Proposizione 4.1. *Non esiste alcun numero razionale x che elevato al quadrato da 2, ciò, equivalentemente, significa che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale.*

Dimostrazione. La prima dimostrazione che $\sqrt{2}$ è irrazionale è di Aristotele (negli Analitici primi), vediamo tale dimostrazione (anche se non nel modo di Aristotele che è complicata): supponiamo che x sia un numero razionale positivo tale che $x^2 = 2$; essendo x razionale si può esprimere come rapporto p/q con p e q numeri (interi) primi tra loro; si deve avere allora che

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \iff p^2 = 2q^2 \tag{4.3}$$

decomponendo p in fattori primi quando scriviamo p^2 questi fattori primi avranno un esponente pari visto che primo membro c'è p^2, in particolare sarà pari l'esponente del fattore primo 2, mentre a destra dell'uguale tutti i fattori primi in cui si decompone q avranno un esponente pari (perché c'è q^2) tranne 2 che avrà esponente dispari, perché c'è quel 2 a fattore di q^2. Quindi è assurdo che valga l'uguaglianza (4.3) per cui non esiste un numero razionale p/q il cui quadrato è 2.[1]
Un altro modo di dimostrare il teorema è il seguente: partendo dalla (4.3) essendo p^2 pari a due volte il numero q^2 vuol dire che p^2 e quindi p è un numero pari. Si ha quindi che $p = 2k$, con k intero, e della uguaglianza precedente si trae $4k^2 = 2q^2$ cioè $2k^2 = q^2$, ne segue che anche q è pari, in contrasto con l'ipotesi che p e q siano primi tra loro. □

Sostanzialmente accade che per certe grandezze (per ora, come detto, prendetelo a fiducia, poi nel volume 2 vedremo esempi geometrici) l'algoritmo di Euclide non hai mai fine, chiaramente tali grandezze non sono numeri naturali. In altri termini *esistono grandezze che non hanno alcun divisore comune*, ecco che allora si distingue tra numeri che hanno divisori comuni e questi si chiamano *numeri commensurabili* e numeri che non hanno nessun divisore comune, detti *numeri incommensurabili*. Il rapporto tra numeri commensurabili è detto come sappiamo *numero razionale* mentre quello tra numeri incommensurabili è detto *numero irrazionale*.

L'insieme che comprende numeri razionali e irrazionali è detto insieme dei *numeri reali*. Ora si tratta di definire con precisione cos'è un numero reale e in particolare cos'è un numero irrazionale, ed è quello che faremo nel proseguo del paragrafo. Per fare ciò ci serve definire per bene le grandezze commensurabili.

4.1.2 Grandezze commensurabili

Definizione 4.1. Due numeri x e y, che per esempio rappresentano la misura di segmenti, si dicono *commensurabili* se valgono una delle seguenti (banalmente equivalenti tra loro) tre affermazioni (che sono quindi tre modi diversi di esprimere la definizione)

- Se x e y hanno un sottomultiplo comune (cioè un divisore comune) cioè esistono due numeri naturali m e n tali che
$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} \tag{4.4}$$
- Se x e y sono multipli di uno stesso numero u (che si chiama spesso *unità di misura*, e che sarebbe il sottomultiplo comune ad x e y)

$$x = mu, \qquad y = nu \tag{4.5}$$

1 Questa è la prima dimostrazione per assurdo che si conosca

- Se esiste un numero razionale m/n che moltiplicato per uno dei due, per esempio y, ci dà l'altro

$$x = \frac{m}{n} y \tag{4.6}$$

L'uguaglianza va intesa nel senso che $x = m\,(\frac{1}{n}\,y)$ cioè: x è uguale alla somma di m segmenti tutti uguali a $\frac{1}{n}y$. In tali ipotesi il numero razionale m/n si chiama la *misura* di x rispetto ad y. Nel caso particolare $x = y$ risulta $m/n = 1$, e perciò al segmento y si dà il nome di *unità di misura*.

Osservazione 4.3. I numeri x e y senza perdere in generalità si possono considerare naturali, in quanto se fossero razionali e quindi del tipo

$$x = \frac{p_1}{q_1}, \qquad y = \frac{p_2}{q_2}$$

(con p_1, q_1, p_2, q_2 numeri naturali) si avrebbe in base alla definizione di numeri commensurabili

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} \iff \frac{p_1}{mq_1} = \frac{p_2}{nq_2}$$

in questo modo ci siamo ricondotti alla definizione di commensurabilità per i numeri naturali p_1 e p_2.

4.1.3 Questione geometrica

Come detto prima, può accadere, e ciò giustifica la definizione di commensurabilità, che per un segmento assegnato x non esista alcuna coppia di interi positivi tale da verificare la (4.6), ossia non esista alcun numero razionale μ tale che:

$$x = \mu y$$

in tal caso si dice che il numero o in geometria il segmento x è *incommensurabile* con y, oppure che i numeri (o segmenti) x ed y sono *incommensurabili* (per esempio sono incommensurabili il lato e la diagonale di un quadrato). Quest'ultima locuzione esprime il fatto che, nel caso suddetto, non è possibile associare al segmento x un numero razionale μ da chiamarsi *misura di x rispetto ad y*. Di qui l'esigenza di costruire un campo numerico più ampio del campo razionale, che consenta di parlare di misura, rispetto ad y, anche per i segmenti incommensurabili con y.[2]

Fissati i segmenti x ed y (commensurabili o non), il procedimento più naturale per associare ad x una misura rispetto ad y è il seguente. Detto m il più grande intero non negativo tale che $mx \leqslant y$ si ha:

$$my \leqslant x < (m+1)y$$

Se risulta $my = x$ i segmenti x ed y sono commensurabili e l'intero m esprime la misura di x rispetto ad y. Se risulta $my < x$ sia c_1 la più grande cifra decimale per la quale si abbia $(m.c_1)y \leqslant x$,[3] sicché:

$$(m.c_1)y \leqslant x < \left(m.c_1 + \frac{1}{10}\right)y$$

2 La parola "campo" per ora è da considerarsi sinonimo di "insieme", nel volume 3 sarà data la definizione rigorosa di "campo".

3 La scrittura $(m.c_1)$ indica il numero decimale di parte intera m e parte decimale c_1.

Se risulta $(m.c_1)y = x$ i segmenti x ed y sono commensurabili e il numero razionale $m.c_1$ è la misura di x rispetto ad y. Se invece $(m.c_1)y < x$ sia c_2 la più grande cifra decimale per la quale si abbia $(m.c_1c_2)y \leqslant x$, sicché:

$$(m.c_1c_2)y \leqslant x < \left(m.c_1c_2 + \frac{1}{10^2}\right)y$$

Se risulta $(m.c_1c_2)y = x$ il numero razionale $m.c_1c_2$ è la misura di x rispetto ad y; in caso contrario il procedimento si itera.

Se dopo un numero finito di passi, si perviene ad un numero razionale del tipo $m.c_1 \dots c_k$ per il quale si abbia:

$$(m.c_1 \dots c_k)y = x$$

il procedimento si arresta ed il numero $m.c_1 \dots c_k$ è la misura di x rispetto ad y. In caso contrario il procedimento si ripete indefinitamente e porta alla costruzione di due classi di numeri razionali:

$$m \qquad m.c_1 \qquad m.c_1c_2 \qquad m.c_1c_2c_3 \qquad \dots \tag{4.7a}$$

$$m+1 \qquad m.c_1 + \frac{1}{10} \qquad m.c_1c_2 + \frac{1}{10^2} \qquad m.c_1c_2c_3 + \frac{1}{10^3} \qquad \dots \tag{4.7b}$$

I numeri della prima classe si chiamano *misure approssimate per difetto* di x rispetto ad y (rispettivamente a meno di una unità (1), di un decimo (1/10), di un centesimo ($1/10^2$), di un millesimo ($1/10^3$), eccetera), i numeri della seconda classe si chiamano *misure approssimate per eccesso* di x rispetto ad y (rispettivamente a meno di una unità, di un decimo (1/10), di un centesimo ($1/10^2$), di un millesimo ($1/10^3$), eccetera).

Il procedimento indicato porta dunque alla costruzione dell'allineamento decimale:

$$m.c_1c_2c_3 \dots \tag{4.8}$$

con infinite cifre decimali. Tale allineamento può risultare periodico (e ciò accade in particolare quando il procedimento iterativo si arresta) e può anche risultare non periodico. Il primo caso si verifica se e solo se i segmenti x ed y sono commensurabili, e l'allineamento (4.8) rappresenta, allora, un numero razionale ed è la misura di x rispetto ad y.

Quando x ed y non sono commensurabili, l'allineamento (4.8) non è periodico e rappresenta quello che viene detto essere un *numero irrazionale*. Tale numero si chiama ancora la *misura* di x rispetto ad y.

4.1.4 Questione algebrica

I numeri reali nascono anche da una questione algebrica (oltre che geometrica come visto prima): detto n un numero naturale, ed a un numero razionale, si riconosce facilmente che l'equazione:

$$x^n = a \tag{4.9}$$

non sempre ammette soluzione nel campo dei numeri razionali; in altri termini tra i numeri razionali non sempre ne esiste uno la cui elevazione ad n ci da a (o equivalentemente è la radice n-esima di un numero razionale a).

Certamente non esistono soluzioni della (4.9) se n è pari ed $a < 0$ (perché in tal caso per ogni numero razionale x si ha $x^n \geqslant 0$ e quindi $x^n \neq a$), ma lo stesso accade anche quando a è positivo e non coincide con la potenza n-esima di un numero razionale.

Che un numero razionale positivo possa non essere potenza n-esima di un altro numero razionale è ben noto: l'abbiamo visto con la proposizione 4.1.

Si pone allora la questione di ricercare se non sia possibile risolvere la (4.9), con a razionale positivo, in un campo numerico più ampio del campo razionale. Il procedimento più naturale per risolvere la (4.9) è il seguente.

Detto m il più grande intero non negativo tale che:

$$m^n \leqslant a < (m+1)^n$$

Se risulta $m^n = a$ l'intero m è soluzione della (4.9). Se risulta $m^n < a$, sia c_1 la più grande cifra decimale per la quale si abbia $(m.c_1)^n \leqslant a$ sicché:

$$(m.c_1)^n \leqslant a < \left(m.c_1 + \frac{1}{10}\right)^n$$

Se risulta $(m.c_1)^n = a$ il numero razionale $(m.c_1)$ è soluzione della (4.9). Se invece $(m.c_1)^n < a$, sia c_2 la più grande cifra decimale per la quale si abbia $(m.c_1c_2)^n \leqslant a$ sicché:

$$(m.c_1c_2)^n \leqslant a < \left(m.c_1c_2 + \frac{1}{10^2}\right)^n$$

Se $(m.c_1c_2)^n = a$ il numero razionale $(m.c_1c_2)$ è soluzione della (4.9). al contrario il processo si itera.

Se dopo un numero finito di passi, si perviene ad un numero razionale del tipo $m.c_1 \ldots c_k$ per il quale si abbia $(m.c_1 \ldots c_k)^n = a$, il procedimento si arresta e il numero $m.c_1 \ldots c_k$ è soluzione della (4.9). In caso contrario il procedimento si ripete indefinitamente e porta alla costruzione di due classi di numeri razionali precedentemente considerate (vedi le (4.7)).

I numeri della prima classe si chiamano radici n-esime di a *approssimate per difetto* (rispettivamente a meno di un'unità, di 1/10, di 1/100, etc.), i numeri della seconda classe si chiamano radici n-esime di a *approssimate per eccesso* (rispettivamente a meno di un'unità, di 1/10, di 1/100, etc.).

Il procedimento indicato conduce anche qui alla costruzione dell'allineamento (4.8), che può essere periodico o non. Il primo caso si verifica quando a ammette una radice n-esima razionale; l'allineamento (4.8) allora rappresenta un numero razionale positivo, soluzione della (4.9), cioè radice n-esima di a. Il secondo caso si presenta quando a non è potenza n-esima di un numero razionale; allora l'allineamento (4.8) rappresenta un numero irrazionale positivo che si dimostra essere soluzione della (4.9), radice n-esima di a.

4.1.5 Struttura di un numero reale

In definitiva un *numero reale* è rappresentato da un allineamento decimale del tipo:

$$\pm m.c_1c_2c_3\ldots$$

periodico o non periodico. Se l'allineamento è periodico il numero è razionale, se l'allineamento è non periodico il numero è *irrazionale*.

4.2 CONFRONTI E RELAZIONI

Il *confronto* tra due numeri reali si effettua, a partire dalla rappresentazione decimale, con lo stesso procedimento seguito nel caso dei numeri razionali (vedi a fine del paragrafo 1.10 a pagina 30).

Osserviamo che, qualunque siano i numeri reali x e y, si verifica necessariamente uno e uno solo dei seguenti casi:

$$x < y \quad x = y \quad x > y \tag{4.10}$$

ciò si esprime dicendo che l'ordinamento naturale dell'insieme dei numeri reali è un *ordinamento reale*.

Per esprimere che un numero x è minore o uguale di un numero reale y, o equivalentemente che y è maggiore o uguale a x, si scrive ovviamente

$$x \leqslant y \quad \text{o equivalentemente} \quad y \geqslant x$$

Le considerazioni svolte su $\mathbb{R}$ valgono anche con riferimento agli altri insiemi numeri visti nel capitolo 1 e in particolare per l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.

4.3 INSIEME DEI REALI

Come già abbiamo fatto per gli insiemi numerici considerati precedentemente d'ora in avanti anche per l'insieme dei numeri reali adotteremo una notazione specifica. Tale insieme sarà denotato in questo modo $\mathbb{R}$. Indicheremo poi con

- $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei numeri reali positivi;
- $\mathbb{R}^-$ l'insieme dei numeri reali negativi;
- $\mathbb{R}_0^+$ l'insieme dei numeri reali non negativi;
- $\mathbb{R}_0^-$ l'insieme dei numeri reali non positivi.

In base alle definizioni appena date, con notazione insiemistica possiamo dire che

$$\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \qquad \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^- \cup \{0\}, \qquad \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \ R^- \cup \{0\}$$

È opportuno notare che l'insieme $\mathbb{R}$ gode, come $\mathbb{Q}$, della *proprietà di densità*, ossia che: se x e y sono due numeri reali distinti, esistono infiniti numeri reali tra essi compresi.

Facendo ricorso alla rappresentazione decimale de numeri x e y, si può anzi facilmente verificare che: se x e y sono due numeri reali distinti, esistono infiniti numeri razionali tra essi compresi. Questa osservazione, che evidenzia un importante legame tra gli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, si può anche esprimere concisamente col dire che *l'insieme* $\mathbb{Q}$ *è denso in* $\mathbb{R}$.

Non è difficile riconoscere pure che: se x e y sono due numeri reali distinti, esistono infiniti numeri irrazionali tra essi compresi, in altri termini *l'insieme* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *dei numeri irrazionali è denso in* $\mathbb{R}$.

In figura 4.1 c'è il diagramma di Eulero-Venn che indica l'inclusione dei numeri razionali e irrazionali nell'insieme dei numeri reali; inoltre indica anche che l'insieme $\mathbb{R}$ è l'unione tra razionali e irrazionali.

4.4 OPERAZIONI E PROPRIETÀ DEI NUMERI REALI

Le operazioni e proprietà viste nel capitolo 1 per i numeri razionali si estendono in maniera ovvia ai numeri reali. Dunque come operazioni sui

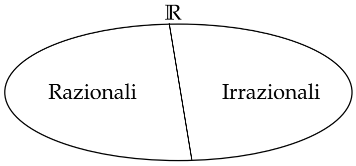

Figura 4.1: L'insieme $\mathbb{R}$ contiene l'insieme dei numeri razionali e di quelli irrazionali.

numeri reali ci sono la *somma (algebrica)* ($\pm$), la *moltiplicazione* ($\times$ o $\cdot$), *divisione* (/), *potenza*, *radice* n*-esima*. Le operazioni sui numeri reali godono delle stesse proprietà viste per i numeri razionali nei paragrafi 1.12.3 e 1.15. Comunque, per comodità, saranno ripetute.

Ricordiamo che con "somma" intendiamo "somma algebrica" quindi presenteremo solo le proprietà dell'addizione perché tanto valgono anche per la sottrazione.

Con x, y, z saranno indicati generici numeri reali.

La somma gode delle seguenti proprietà:

- proprietà *commutativa*: $x + y = y + x$;
- proprietà *associativa*: $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- è dotata di *elemento neutro* che è zero: $x + 0 = 0 + x = x$.

La moltiplicazione gode delle seguenti proprietà:

- proprietà *commutativa*: $x \cdot y = y \cdot x$.
- proprietà *associativa*: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- proprietà *distributiva* della moltiplicazione rispetto alla somma:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

- è dotata di *elemento neutro* che è uno: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
- *legge di annullamento del prodotto*:

$$x \cdot y = 0 \iff x = 0 \text{ e/o } y = 0.$$

La divisione gode delle seguenti proprietà:

- proprietà *invariantiva*:

$$\frac{x}{y} = \frac{mx}{my} \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

- proprietà *distributiva* della divisione rispetto alla somma:

$$(x + y)/z = x/z + y/z.$$

La potenza è definita in questo modo

$$a^n \triangleq \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}} \qquad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \tag{4.11}$$

$$a^0 \triangleq 1 \qquad a \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{4.12}$$

$$0^0 \text{ non esiste} \tag{4.13}$$

$$a^{-n} \triangleq \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad a \in \mathbb{R} - \{0\}, n \in \mathbb{N} \tag{4.14}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \triangleq \sqrt[n]{a^m} \qquad a \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} \tag{4.15}$$

$$a^{\frac{-m}{n}} \triangleq \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad a \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} \tag{4.16}$$

e come per i numeri razionali *non è* definita la potenza di numeri negativi a esponenti razionali (vedere esempio 1.75 a pagina 50). Notiamo dalla (4.14) come per cambiare il segno dell'esponente di una potenza basta fare il reciproco della base.

La potenza gode delle seguenti proprietà. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $r, s \in \mathbb{Q}$.

$$a^r a^s = a^{r+s}; \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}; \qquad (a^r)^s = a^{rs}; \tag{4.17}$$

$$(ab \cdot \ldots c)^r = a^r b^r \ldots c^r; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}. \tag{4.18}$$

4.4.1 Monotonia delle potenze

La parola "monotonia" sarà precisata meglio nel volume 2, in questo momento per noi sta ad indicare uno studio su come aumenta (o diminuisce) una potenza al variare della base, in particolare: se e come una relazione d'ordine sulla base si trasmette alle potenze di quelle basi.

Proposizione 4.2. *Detti* a, b *due numeri reali positivi, sussiste*

$$a > b \iff a^n > b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}; \tag{4.19a}$$

$$a > b \iff \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}; \tag{4.19b}$$

$$a > b \iff a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}} \quad \forall \tfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+; \tag{4.19c}$$

$$a > 1 \iff a^r > 1 \quad \forall r \in \mathbb{Q}^+; \tag{4.19d}$$

$$0 < a < 1 \iff 0 < a^r < 1 \quad \forall r \in \mathbb{Q}^+; \tag{4.19e}$$

$$a > 1 \iff a^q > a^s \quad \forall q, s \in Q \textit{ con } q > s; \tag{4.19f}$$

$$0 < a < 1 \iff a^q < a^s \quad \forall q, s \in Q \textit{ con } q > s; \tag{4.19g}$$

Dimostrazione. La (4.19a) è ovvia perché se $a > b$ anche il numero che si ottiene moltiplicando n volte a (ovvero a^n) sarà maggiore del numero che si ottiene moltiplicando n volte b (ovvero b^n), e viceversa.

La dimostrazione della (4.19b) nel verso $\Rightarrow$ si ottiene per assurdo: se fosse $\sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{b}$ elevando alla potenza n-esima si avrebbe (per la (4.19a)):

$$(\sqrt[n]{a})^n \leqslant (\sqrt[n]{b})^n \iff a \leqslant b,$$

contro l'ipotesi che $a > b$, dunque è assurdo che $\sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{b}$ e vale che $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Anche la dimostrazione della (4.19b) nel verso $\Leftarrow$ si ottiene per assurdo: se fosse $a \leqslant b$ per quanto appena dimostrato seguirebbe che $\sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{b}$ contro l'ipotesi che dice $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

La dimostrazione delle (4.19c) nel verso $\Rightarrow$ è immediata, infatti considerando la (4.19b), poi elevando ambo i membri alla potenza m e ricordando la (4.19a) si ha

$$a > b \implies \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \implies (\sqrt[n]{a})^m > (\sqrt[n]{b})^m$$

ma $(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$ e $(\sqrt[n]{b})^m = b^{\frac{m}{n}}$.

La dimostrazione delle (4.19c) nel verso $\Leftarrow$ come al solito si ottiene per assurdo: se fosse $a \leqslant b$ per la (4.19b) si avrebbe che $\sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{b}$ ed elevando a m per la (4.19a) si ha

$$(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} \leqslant (\sqrt[n]{b})^m = b^{\frac{m}{n}}$$

che assurdo perché contro le ipotesi.

Le (4.19d) e (4.19e) sono immediate in quanto casi particolari della (4.19c); precisamente la (4.19d) si ottiene dalla (4.19c) per $b = 1$ (e $m/n = r$), la (4.19e) si ottiene ancora dalla (4.19c) dove quello che abbiamo chiamato a nella (4.19c) è il numero 1 nella (4.19e), e quello che nella (4.19c) abbiamo chiamato b è a della (4.19e).

La dimostrazione della (4.19f) segue immediatamente dalla (4.19d), infatti essendo $q > s$ significa che $q - s > 0$ e quindi è applicabile la (4.19d), ricordando inoltre le proprietà delle potenze

$$a > 1 \iff a^{p-q} > 1 \iff \frac{a^q}{a^s} > 1 \iff a^q > a^s.$$

Analogamente la dimostrazione della (4.19g) segue immediatamente dalla (4.19e), infatti essendo $q > s$ significa che $q - s > 0$ e quindi è applicabile la (4.19e), ricordando inoltre le proprietà delle potenze

$$a < 1 \iff a^{p-q} < 1 \iff \frac{a^q}{a^s} < 1 \iff a^q < a^s. \qquad \square$$

Le (4.19f), (4.19g) esprimono in simboli il fatto che le potenza di un numero reale maggiore di 1 crescono al crescere dell'esponente e quelle di un numero reale positivo minore di 1 decrescono col crescere dell'esponente razionale.

Un altro modo di esprimere le (4.19f), (4.19g), *molto utile ai fini pratici* è il seguente:

- Se la base è maggiore di 1, una disuguaglianza tra potenze equivale a una disuguaglianza equiversa tra gli esponenti razionali.

- Se la base è positiva ma minore di 1, una disuguaglianza tra potenze equivale a una disuguaglianza di verso contrario tra gli esponenti razionali.

In simboli, siano $a \in \mathbb{R}, r, s \in \mathbb{Q}^+$,

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{se } a > 1, \quad a^r < a^s \iff r < s, \\ &\text{se } 0 < a < 1, \quad a^r < a^s \iff r > s. \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(4.20a) \\ &(4.20b) \end{aligned}$$

4.4.2 Potenze a esponente reale

Fino ad ora si è dato significato alle potenze a base reale positiva e esponente razionale. Si è visto che nel caso di base negativa ed esponente razionale non è possibile definire la potenza perché si andrebbe incontro ad ambiguità, mentre per esponente intero ha senso definire la potenza anche per base negativa.

Si può, tuttavia, definire la potenza a base reale positiva ed *esponente irrazionale* in modo da avere che la potenza può essere definita con base reale positiva ed esponente reale qualsiasi (razionale o irrazionale che sia). Per capire tale definizione bisogna conoscere i concetti di insiemi separati e contigui che vedremo nel volume 3, quindi tutto è rimandato.

4.4.3 Uguaglianza tra potenze e basi

Adesso enunceremo una proposizione che può tornare utile nella risoluzione di molti esercizi.

Proposizione 4.3. *Se due potenze, di basi non negative e esponente naturale, coincidono sono uguali anche le basi.* In simboli

$$a^n = b^n \implies a = b \qquad a, b \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. Facciamo la radice n ad ambo i membri (e si può fare perché essendo le basi positive lo sono anche le potenze a^n e b^n)

$$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{b^n}$$

A primo membro si tratta di trovare quel numero che elevato a n ci da a^n è questo è il valore assoluto di a, ma visto che $a \geqslant 0$ allora $|a| = a$, stesso discorso per b, quindi

$$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{b^n} \iff a = b \qquad \square$$

Osservazione 4.4. È essenziale che a e b siano entrambi non negativi, altrimenti la proposizione non è più valida. Per esempio la seguente uguaglianza tra potenze è vera

$$2^4 = (-2)^4$$

ma le basi non sono uguali

$$2 \neq -2.$$

Osservazione 4.5. Della proposizione precedente vale ovviamente anche il viceversa, cioè se due numeri sono uguali anche le loro potenze a un esponente qualsiasi sono uguali

$$a = b \implies a^n = b^n$$

In questo caso non è nemmeno necessario supporre che a e b siano non negativi positivi.

4.5 DEFINIZIONI RELATIVE AI NUMERI REALI

In tale paragrafo saranno ripetute per comodità definizioni già date nel paragrafo 1.14 a pagina 47, come quelle di valore assoluto, opposti, reciproco. Si tratterà, eventualmente, di sostituire alla parola "razionale" la parola "reale". Tuttavia gli esempi esplicativi di tali definizioni non sono stati ripetuti per evitare un inutile allungamento del paragrafo, per essi si può fare riferimento a quelli contenuti nel paragrafo 1.14 a pagina 47.

Saranno inoltre fatte delle considerazioni in più sul concetto di valore assoluto. Tali considerazioni ovviamente saranno valide anche per i numeri razionali ma non sono state presentate nel capitolo 1 per evitare di appesantire troppo quel capitolo introduttivo e per il fatto che hanno una importanza maggiore con riferimento ai numeri reali.

Definizione 4.2 (Valore assoluto)**.** Si chiama *valore assoluto*, *modulo* o più raramente *valore aritmetico*, di un numero reale x e si indica con $|x|$, il numero stesso privato di segno, in altri termini il numero x stesso se x è positivo, lo zero se $x = 0$, l'opposto di x se x è negativo.

$$\boxed{|x| \triangleq \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}}$$

Dalla definizione data discendono, ovviamente, le seguenti proprietà del valore assoluto:

$$\boxed{|x| \geqslant 0, \quad |-x| = |x|, \quad x \leqslant |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}} \tag{4.21}$$

che ci dicono, rispettivamente, che:

- il valore assoluto di un numero (reale) è sempre maggiore o uguale a 0;
- il valore assoluto di $-x$ è uguale al valore assoluto di x;
- un numero (reale) x è sempre minore o uguale del suo valore assoluto.

Da queste proprietà si trae facilmente che:

$$\boxed{-|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}} \tag{4.22}$$

dove se $x \neq 0$ la doppia disuguaglianza va intesa come uguaglianza alternativa, nel senso che:

$$-|x| = x < |x| \text{ se } x < 0, \quad -|x| < x = |x| \text{ se } x > 0.$$

Dalla (4.22) consegue che qualunque sia il numero reale $\alpha > 0$ si ha:

$$|x| \leqslant \alpha \iff -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha \tag{4.23}$$

$$|x| < \alpha \iff -\alpha < x < \alpha \tag{4.24}$$

In maniera ovvia valgono anche le seguenti equivalenze:

$$|x| \geqslant \alpha \iff x \leqslant -\alpha \text{ oppure } x \geqslant \alpha \tag{4.25}$$

$$|x| > \alpha \iff x < -\alpha \text{ oppure } x > \alpha. \tag{4.26}$$

Definizione 4.3. Dati due numeri reali, essi si dicono *concordi* se hanno lo stesso segno, viceversa si dicono *discordi*.

Proposizione 4.4 (Disuguaglianza triangolare)**.** *Il valore assoluto della somma di due numeri reali x e y è minore o uguale della somma dei valori assoluti ed è maggiore o uguale al valore assoluto della differenza dei valori assoluti dei singoli numeri.* In simboli:

$$\boxed{||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|} \tag{4.27}$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che $|x+y| \leqslant |x|+|y|$. È ovvio che:

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$$

poniamo $z = x+y$ e $|x|+|y| = \alpha$, in questo modo la precedente diventa (ricordando anche la (4.23)):

$$-\alpha \leqslant z \leqslant \alpha \Leftrightarrow |z| \leqslant \alpha$$

sostituendo ad α e z i rispettivi valori si ha che la precedente diventa:

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \tag{4.28}$$

che è quello che volevamo dimostrare in questa prima parte.

A questo punto dimostriamo che $|x+y| \geqslant ||x|-|y||$: partiamo osservando che $x = (x+y)+(-y)$ e, nell'ordine, prendiamo il valore assoluto ad entrambi i membri, applichiamo la (4.28), la seconda delle (4.21):

$$|x| = |(x+y)+(-y)| \leqslant |x+y|+|-y| = |x+y|+|y|$$

leggendo il primo e l'ultimo membro si ha che:

$$|x| \leqslant |x+y|+|y| \iff |x|-|y| \leqslant |x+y| \tag{4.29}$$

Osserviamo che, visto che sono variabili generiche, scambiando i ruoli di x e y si ha anche che:

$$|y|-|x| \leqslant |x+y| \tag{4.30}$$

(cioè alla (4.30) si arriva allo stesso modo di come si è arrivati alla (4.29) partendo però da $y = (y+x)+(-x)$). A questo punto moltiplichiamo la (4.29) per -1 ottenendo:

$$|y|-|x| \geqslant -|x+y| \tag{4.31}$$

Ponendo $z = |y|-|x|$ e $\alpha = |x+y|$ dalle (4.30) e (4.31) si ha:

$$-\alpha \leqslant z \leqslant \alpha \iff |z| \leqslant \alpha$$

Sostituendo a z ed α i valori originali si ha che la precedente diventa:

$$||x|-|y|| \leqslant |x+y|$$

che è l'altra perte della disuguaglianza triangolare. □

La disuguaglianza triangolare è banale se uno di due numeri x, y è nullo; infatti se per esempio $y = 0$ essa diventa:

$$|x| \leqslant |x| \leqslant |x| \iff |x| = |x| = |x|$$

in caso contrario (cioè se sia x che y non sono nulli) la disuguaglianza triangolare va intesa come uguaglianza alternativa, nel senso che:

$$\begin{aligned} ||x|-|y|| = |x+y| < |x|+|y| \quad &\text{se } x \text{ e } y \text{ sono discordi,} \\ ||x|-|y|| < |x+y| = |x|+|y| \quad &\text{se } x \text{ e } y \text{ sono concordi.} \end{aligned}$$

Proposizione 4.5. *Il valore assoluto del quoziente [prodotto] tra numeri reali è il quoziente [prodotto] dei valori assoluti dei singoli numeri.* In simboli

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \qquad & \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}-\{0\} \\ |xy| = |x||y| \qquad & \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Il valore assoluto restituisce sempre una quantità quantità positiva senza alterarne il valore, al più cambia il segno. Nelle espressioni precedenti a primo e secondo membro il valore non cambia e il segno è sempre banalmente positivo. □

Definizione 4.4 (Numeri opposti)**.** Due numeri aventi lo stesso valore assoluto ma segno diverso si dicono *opposti* (o più raramente *simmetrici* o *contrari*). Il numero zero, per convenzione, si considera come l'opposto di se stesso (cioè l'opposto di zero è zero).

Definizione 4.5 (Reciproco o inverso)**.** Un numero si dice essere il *reciproco* o *inverso* di un altro numero reale se il loro prodotto è pari a 1. Ovviamente se un numero a è il reciproco di b anche b e il reciproco di a, di conseguenza due numeri il cui prodotto è pari a 1 si dicono *reciproci* o *inversi*. Il concetto di reciproco non è definito per lo zero cioè *non è esiste* il reciproco di zero.

Il reciproco di un numero $a \neq 0$ è ovviamente il numero $\frac{1}{a}$, infatti per definizione di prodotto e ricordando che una frazione è in pratica una divisione si ha:

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$

Definizione 4.6 (Congruenza)**.** Dato un numero reale n, si dice che due numeri $x, y \in \mathbb{R}$ sono *congrui (rispetto) al modulo* n e si scrive $x \equiv y \pmod{n}$, quando la loro differenza è un multiplo intero (positivo, negativo o nullo) di n. In simboli

$$x \equiv y \pmod{n} \overset{\triangle}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = kn.$$

La definizione di congruenza si può particolarizzare anche a sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, l'importante è che il multiplo k si un numero intero. Per esempio si può restringere a seconda dei contesti al caso in cui $x, y \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, ma sempre $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio 4.2. Supponiamo che $n = 10$, e che x, y sono numeri naturali. Avremo per esempio che i numeri 12 e 2 sono congrui modulo 10, infatti $12 - 2 = 10$ ed $k = 1$ tale che $k10 = 10$ è appunto uguale a $12 - 2$. Anche 24 e 4 sono congrui modulo 10, infatti $24 - 4 = 20$ e per $k = 2$ si ha $k10 = 20$. Quindi da 0 a 9 sono numeri diversi poi da 10 è congruente a 0, 11 a 1, e così via arrivata a un altro multiplo di 10 come 20 abbiamo che questo è congruente a 0 e 10, 21 è congruente a 1 e 11 è così via. L'utilità di questa definizione si trova, per esempio, in Elettronica digitale, in cui si hanno circuiti che possono contare solo fino ad n, per poi ripartire da zero.

4.6 RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA

Anche questo paragrafo a rigore andrebbe posticipato dopo aver parlato di geometria elementare ma visto che fa riferimento ai numeri reali, è importante e soprattutto richiede concetti di geometria veramente semplici, ho preferito metterlo adesso.[4]

4 Anche tale paragrafo è preso pari pari da [7] che è un testo universitario, ma non vi spaventate letto con attenzione è semplice ed è veramente fatto bene, per tale motivo non l'ho modificato.

In matematica e nelle sue applicazioni si rileva molto utile la cosiddetta *rappresentazione geometrica dei numeri reali*, che consente di visualizzare graficamente caratteristiche e proprietà dei numeri reali, facilitandone quindi la comprensione e la memorizzazione.

Su una retta r fissiamo un punto O, detto *origine*, e un punto U, detto *unità*, distinto da O. Restano così fissati su r due versi di percorrenza, fra loro opposti, chiameremo *positivo* il verso secondo il quale O precede U, *negativo* l'altro. La retta risulta così orientata, e delle due semirette di origine O, private dell'origine, quelle cui appartiene U si chiama *semiretta positiva*, l'altra si chiama *semiretta negativa*.

Una retta orientata (cioè una retta su ci abbiamo definito un verso positivo e quindi uno negativo) si dice anche *asse*, ed allora la semiretta positiva e la semiretta negativa si dicono anche, rispettivamente, *semiasse positivo* e *semiasse negativo*. Indicheremo tali semiassi, rispettivamente con r^+ e r^-.

Assunto come unità di misura il segmento OU (cioè del segmento di estremi O e U), per ogni punto P di r denotiamo come $\overline{OP}$ la misura rispetto ad OU del segmento OP. Poniamo quindi:

$$x_P \triangleq \begin{cases} \overline{OP} & \text{se } P \in r^+ \\ 0 & \text{se } P = O \\ -\overline{OP} & \text{se } P \in r^- \end{cases}$$

In tal modo fissati sulla retta r i due punti distinti O e U, ad ogni punto $P \in r$ viene associato un numero reale x_P che si chiama l'*ascissa* di P (rispetto al riferimento di origine O e punto unità U). In particolare al punto U corrisponde il numero 1 e cioè giustifica la denominazione di punto unità attribuito ad U.

Si dimostra che, reciprocamente, *ogni numero reale x è l'ascissa di un ben determinato punto P della retta r*: tale punto P è quella che si chiama *l'immagine* del numero reale x sulla retta r. Evidentemente i punti di r^+ sono le immagini dei numeri reali positivi, i punti di r^- sono le immagini dei numeri reali negativi, l'origine è l'immagine dello zero.

La corrispondenza fra i numeri reali e loro immagine sulla retta fornisce la *rappresentazione geometrica dei numeri reali*. Mediante tale rappresentazione una retta r, sulla quale sono stati fissati due punti O e U, si interpreta come un modello geometrico dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Nella rappresentazione geometrica di numeri reali si usa abitualmente identificare i punti della retta con le rispettive ascisse; precisamente con uno stesso simbolo x si suole indicare sia un numero reale sia il punto della retta di cui x è l'ascissa. Si parla quindi indifferentemente del numero reale x o del punto x della retta, di un insieme X di numeri reali o di un insieme X di punti della retta, eccetera. È del tutto evidente l'utilità della predetta convenzione, che consente di esprimere con linguaggio geometrico, e perciò visualizzare in forma intuitiva, proprietà e nozioni di carattere algebrico.

Ad esempio, l'orientamento della retta r traduce geometricamente l'ordinamento naturale del campo reale; in altri termini la disuguaglianza $x < y$, tra numeri reali, si interpreta nel senso che il punto (di ascissa) x precede il punto (di ascissa) y nel verso positivo della retta. Notiamo che per illustrare graficamente proprietà di questo tipo non è essenziale l'indicazione esplicita dell'origine e del punto unità, bensì l'indicazione del verso positivo della retta: tale *verso viene, allora, indicato con una freccia* (figura 4.2).

Si osservi che:

- Due numeri reali opposti (per esempio $+2$ e -2) hanno sulla retta immagini simmetriche rispetto all'origine.

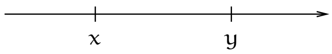

Figura 4.2: Indicazione del verso di una retta.

- Il valore assoluto di un numero reale x rappresenta la lunghezza del segmento di estremi O e x.
- Il numero $|x-y|$ rappresenta la lunghezza del segmento di estremi x e y. Al numero $|x-y|$ si da perciò anche il nome di *distanza* degli elementi x e y di $\mathbb{R}$.

4.7 NOTAZIONI SCIENTIFICA ED ESPONENZIALE

Sfruttando le proprietà delle potenze a base 10 un numero può essere rappresentato in infiniti modi, ad esempio il numero 35.2 si può scrivere

$$35.2 = 3.52 \cdot 10^1 = 0.352 \cdot 10^2 = 352 \cdot 10^{-1} = \dots$$

Un numero scritto nella forma in cui compare un esponenziale, cioè del tipo

$$mb^e \qquad m \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+, e \in Z \tag{4.32}$$

si dice che è espresso in *notazione esponenziale*, i numeri m, b, e prendono il nome rispettivamente di *mantissa*, *base*, *esponente*; come detto quasi sempre la base $b = 10$ perché in questo modo è più facile spostare il separatore decimale.

Quando il numero si mette in forma esponenziale in cui $1 \leqslant |m| < b$ si parla di *notazione scientifica*, mentre si parla di *forma normalizzata* quando $b^{-1} \leqslant |m| < 1$.

Esempio 4.3. Scrivere il seguente numero in notazione scientifica e in forma normalizzata, considerando come base $b = 10$

$$124.76$$

Soluzione. La notazione scientifica è

$$1.2467 \cdot 10^2$$

mentre quella normalizzata è

$$0.124\,76 \cdot 10^3$$

□

Esempio 4.4. Scrivere il seguente numero in notazione scientifica e in forma normalizzata, considerando come base $b = 10$

$$-0.034$$

Soluzione. La notazione scientifica è

$$-3.4 \cdot 10^{-2}$$

mentre quella normalizzata è

$$-0.34 \cdot 10^{-1}$$

□

La notazione esponenziale è molto adoperata per rappresentare in modo compatto numeri molto grandi o molto piccoli, per esempio il raggio medio del Sole è

$$638\,000\,000\ \mathrm{m}$$

ma è molto comodo scriverlo in notazione esponenziale

$$6.38 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m}$$

In particolare la forma normalizzata è usata nei calcolatori elettronici. Sempre in ambito elettronico/informatico la notazione esponenziale è detta rappresentazione *a virgola mobile* (in inglese floating point) per il fatto che giocando sull'esponente si varia la posizione del separatore decimale della mantissa, mentre il classico modo di indicare i numeri prevede sempre il separatore decimale a destra delle unità ed è per questo detta *a virgola fissa* (in inglese fixed point).

La notazione scientifica è utile perché permette di stabilire subito quello che viene definito *l'ordine di grandezza*, o semplicemente *ordine*, del numero, esso è la potenza di 10 più vicina al numero; per calcolarlo si scrive il numero in notazione esponenziale $m \cdot 10^{e}$, se $|m| < 5$ l'ordine di grandezza è 10^{e}, se invece $|m| \geqslant 5$ l'ordine è 10^{e+1}.

Esempio 4.5. Calcolare l'ordine di grandezza del numero 357. Il numero dato si può scrivere in questo modo

$$357 = 3.57 \cdot 10^{2}$$

quindi ha come ordine di grandezza $10^{2} = 100$.

Esempio 4.6. Calcolare l'ordine di grandezza del numero -0.05. Il numero dato si può scrivere in questo modo

$$-0.05 = -5 \cdot 10^{-2} \implies |-0.05| = 5 \cdot 10^{-2}$$

quindi ha come ordine di grandezza $10^{-2+1} = 0.1$.

Osservazione 4.6. Come detto visto che quasi sempre si prende come base $b = 10$ a volte con ordine di grandezza si indica l'esponente e di b. Con riferimento agli esempi 4.5 e 4.6 si dice talvolta che i numeri 357 e -0.03 hanno ordini di grandezza rispettivamente 2 e -2.

Osservazione 4.7. L'ordine di grandezza è un concetto definito per stabilire in maniera approssimata quanto è grande (in valore assoluto) un numero.

Esercizi

Esercizio 4.1. Trovare l'ordine di grandezza del numero 5 considerando come base $b = 10$. [1]

Esercizio 4.2. Trovare l'ordine di grandezza del numero -0.7 considerando come base $b = 10$. [0.1]

Esercizio 4.3. Trovare l'ordine di grandezza del numero 1035.4 considerando come base $b = 10$. [1000]

Esercizio 4.4. Trovare l'ordine di grandezza del numero $52 \cdot 10^{-1}$ considerando come base $b = 10$. [1]

4.8 APPROSSIMAZIONI

In tutto il libro si parla di numeri in astratto, senza dire quei numeri a cosa si riferiscono. Nella pratica i numeri sono il frutto di un processo di *conteggio* (contare un certo numero oggetti), di un processo di misurazione (paragrafo A.1 a pagina 339), o di operazioni su altri numeri che a loro volta rappresentano un conteggio o una misura.

Capiamo subito che quando nella pratica si trattano i numeri, si devono fare delle approssimazioni; pensiamo ai numeri irrazionali (come $\pi = 3.14\ldots$) o a i numeri decimali illimitati (come $0.\bar{3}$), quando li scriviamo o li usiamo in operazioni matematiche necessariamente dobbiamo fermarci a un numero *finito* di cifre decimali, e a seconda di quante cifre decimali "prendiamo" in partenza otteniamo nel risultato numeri diversi.

Ma anche quando abbiamo numeri decimali limitati ci può essere la necessità di fare approssimazioni, perché operazioni tra numeri decimali limitati possono restituire numeri decimali illimitati (per esempio dividendo 1 per 3 si ha $0.\bar{3}$) o numeri irrazionali (per esempio la radice quadrata di 2 è un numero irrazionale), oppure perché ci serviamo di strumenti di calcolo che hanno una "precisione" inferiore rispetto ai nostri numeri: pensiamo al caso in cui abbiamo una calcolatrice in grado di scrivere numeri fino a 10 cifre, è chiaro che se già in partenza abbiamo un numero di più di dieci cifre dobbiamo approssimarlo a un numero di 10 cifre, così come se durante le operazioni risultasse un numero con più di 10 cifre la nostra calcolatrice lo approssimerà in qualche modo a 10 cifre.

L'approssimazione $\bar{x}$ di un numero x può essere maggiore o minore di x, nel primo caso si parla di approssimazione per *eccesso*, nel secondo per *difetto*.

Esempio 4.7. Dato il numero 3.76, il numero 4 è una sua approssimazione per eccesso mentre 3 è una sua approssimazione per eccesso.

Se non diversamente richiesto di solito si sceglie l'approssimazione (compatibilmente con le cifre disponibili) che sia più più vicina al numero da approssimre, quindi se la prima cifra da eliminare è $\geqslant 6$, si approssima per eccesso incrementando la cifra di peso immediatamente maggiore di quella che si elimina, mentre se è $\leqslant 4$ si approssima per difetto eliminando semplicemente la cifra da eliminare, se infine la cifra è 5 per convenzione spesso si approssima per eccesso.

Esempio 4.8. Approssimare a due cifre decimali il seguente numero: 6.738.

Soluzione. La prima cifra da eliminare è l'8 dei millesimi che essendo $\geqslant 5$ bisogna incrementare quella di peso immediatamente maggiore, quindi l'approssimazione a 2 cifre decimali è 6.74.

Esempio 4.9. Approssimare a un numero intero il seguente numero: 0.424.

Soluzione. La prima cifra da eliminare è il 4 dei decimi che essendo $\leqslant 5$ bisogna semplicemente eliminare le cifre decimali, quindi l'approssimazione a un numero intero è 0.

Esempio 4.10. Approssimare a 2 cifre decimali il seguente numero: 2.445.

Soluzione. La prima cifra da eliminare è il 5 dei decimi che essendo $\geqslant 5$ bisogna incrementare la cifra di peso maggiore, quindi l'approssimazione a 2 cifre decimali è 2.45.

Utili sono anche le definizioni di errore assoluto e relativo:

Definizione 4.7. Sia $\bar{x}$ un'approssimazione di x, si definisce *errore assoluto* e_a il numero che indica quanto $\bar{x}$ "dista" da x

$$e_a \triangleq |x - \bar{x}|$$

Mentre si definisce *errore relativo* e_r il numero che indica quanto $\bar{x}$ "dista" da x rapportato al valore assoluto x

$$e_r = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|}$$

Ovviamente l'errore relativo ha senso solo se $x \neq 0$.

L'errore assoluto è utile per avere un'indicazione di quanto è "buona" un'approssimazione (più piccolo è e_a e meglio è), mentre l'errore relativo è utile per sapere quanto è "buona" un'approssimazione ma in rapporto al valore della grandezza che stiamo approssimando e quindi per confrontare errori relativi a grandezze diverse. L'esempio seguente chiarirà la questione.

Esempio 4.11. Siano $x = 10.12$ e $\bar{x} = 10.05$. L'errore assoluto è

$$e_a = |x - \bar{x}| = 10.12 - 10.05 = 0.07$$

Siano ora $x = 10\,000.14$ e $\bar{x} = 10\,000.07$, anche in questo caso risulta che l'errore assoluto è

$$e_a = |x - \bar{x}| = 10\,000.14 - 10\,000.07 = 0.07$$

Ma appare evidente che nel secondo caso l'approssimazione è migliore, infatti abbiamo un errore di 0.07 su su un numero che ha un ordine di grandezza di 10 000, mentre nel primo caso abbiamo lo stesso errore assoluto ma su un numero che ha un ordine di grandezza di 10. Tale differenza è messa in evidenza se calcoliamo l'errore relativo; nel primo caso:

$$e_r = \frac{|x - \bar{x}|}{x} = \frac{10.12 - 10.05}{10.12} \simeq 0.0069$$

mentre nel secondo caso:

$$e_r = \frac{|x - \bar{x}|}{x} = \frac{10\,000.14 - 10\,000.07}{10\,000.14} \simeq 0.000\,006\,9$$

Come si vede nel secondo caso l'errore relativo è molto più piccolo.

Comunque, in generale, la scelta di un tipo di errore piuttosto che un altro dipende anche dal particolare problema in esame. Se ad esempio $|x|$ è uguale a zero o "piccolo" l'errore relativo può non essere attendibile; talvolta in pratica si usa l'*errore misto*

$$e_m = \frac{|x - \bar{x}|}{1 + |x|}$$

in questo modo se $|x| \gg 1$ l'errore misto è circa uguale a quello relativo, mentre se $|x| \ll 1$ l'errore misto è circa uguale a quello assoluto.

Esercizi

Esercizio 4.5. Approssimare a 3 decimali il seguente numero: 1.8499.

Esercizio 4.6. Approssimare alle decine il seguente numero: 235.4.

4.9 FATTORIALE E COEFFICIENTE BINOMIALE

Ora daremo un paio di definizioni che riguardano i numeri naturali e che rivestono un ruolo fondamentale nel calcolo combinatorio e delle probabilità (argomenti che vedremo in parte nei volumi successivi). Avremmo potuto definirle anche nel capitolo 1 ma ho preferito metterle adesso in modo da avere in questo capitolo tutte le definizioni riguardanti i numeri. Queste definizioni ci serviranno nella formula di Newton sulla potenza di un binomio (proposizione 5.7 a pagina 159)

Definizione 4.8 (Fattoriale)**.** Dato un numero naturale, $n \in \mathbb{N}$, si definisce *fattoriale* di n e si indica con $n!$ il prodotto degli interi positivi da 1 a n:

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1)n}$$

La definizione si estende anche al caso $n = 0$, ponendo $0! = 1$.

Osservazione 4.8. Notiamo che il fattoriale di un numero n si può scrivere come il prodotto di n per il fattoriale del numero naturale precedente ad n cioè di $n-1$:

$$\boxed{n! = n(n-1)!} \tag{4.33}$$

La posizione $0! = 1$ si fa per fare in modo che la formula precedente valga per ogni $n \in \mathbb{N}$ anche per il numero 1.[5]

Esempio 4.12. Calcolare il fattoriale dei primi cinque numeri naturali.

Soluzione. Applicando la definizione

$$\begin{aligned}
1! &= 1 \\
2! &= 2 \cdot 1 = 2 \\
3! &= 3 \cdot 2 = 6 \\
4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 \cdot 3! = 24 \\
5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5 \cdot 4! = 120
\end{aligned}$$

Come si vede al crescere dell'argomento il fattoriale cresce di molto, raggiungendo facilmente numeri molto alti.

Definizione 4.9 (Coefficiente binomiale)**.** Dati due numeri naturali $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant k$ si chiama *coefficiente binomiale* di n su k e si indica con $\binom{n}{k}$ il seguente numero

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1)k}}$$

Osservazione 4.9. Un modo molto semplice per calcolare il coefficiente binomiale è osservare che a numeratore ci sono i prodotti di k fattori a partire da n ed andando a decrescere, mentre a denominatore c'è il fattoriale di k.

Esempio 4.13. Calcolare il coefficiente binomiale di 9 su 4.

5 Esiste anche il *doppio fattoriale* ma per ragioni di spazio, e perché meno importante, ne parleremo nel volume 3.

Soluzione. Si tratta di fare il rapporto tra i primi 4 fattori decrescenti a partire da 9, diviso il fattoriale di 4

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

Esempio 4.14. Calcolare il coefficiente binomiale di 90 su 2.

Soluzione. Si tratta di fare il rapporto tra i primi 2 fattori decrescenti a partire da 90, diviso il fattoriale di 2

$$\binom{90}{2} = \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005$$

Proposizione 4.6. *Dati due numeri naturali* $n, k \in \mathbb{N}$ *con* $n \geqslant k$ *il coefficiente binomiale di* n *su* k *si può scrivere come il rapporto tra il fattoriale di* n *e il prodotto tra il fattoriale di* k *e il fattoriale di* $n-k$*:*

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}} \tag{4.34}$$

inoltre valgono le seguenti proprietà

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{4.35}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k} \tag{4.36}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \tag{4.37}$$

La (4.37) *prende il nome di* proprietà di Stifel.

Dimostrazione. Dimostriamo la (4.34): dalla definizione di coefficiente binomiale, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $(n-k)!$, ricordiamo i la proprietà (4.33) del fattoriale

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1)k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-k)!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1)r(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

Dimostriamo ora la (4.35): ricordando la (4.34)

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Dimostriamo la (4.36): ricordando la (4.34)

$$\binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n!(n-k+1)}{(n-k+1)!(k-1)!k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Dimostriamo la (4.37): ricordando la (4.34)

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!k+n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

□

Osservazione 4.10. Avendo definito il fattoriale anche per lo zero, ed essendo valida la (4.34) si estende la definizione di coefficiente binomiale anche al caso $k = 0$ oppure $n = k = 0$:

$$\boxed{\begin{aligned}\binom{n}{0} &= 1\\ \binom{0}{0} &= 1\end{aligned}}$$

infatti

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1\\ \binom{0}{0} &= \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

Esempio 4.15. Calcolare il coefficiente binomiale di 12 su 8.

Soluzione. In base alla definizione

$$\binom{12}{8} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 495$$

Sfruttando la (4.35) possiamo fare prima essendo

$$\binom{12}{8} = \binom{12}{4} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 495$$

4.10 SOMMATORIA E PRODUTTORIA

Per concludere questo capitolo vediamo due simboli, quello di *sommatoria* $\sum$ e di *produttoria* $\prod$ che servono per indicare in maniera compatta rispettivamente la somma e il prodotto di n numeri, cioè valgono le seguenti uguaglianze per definizione (con $n \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \dots x_n$$

la variabile i è detta *indice* della sommatoria [produttoria] perché al variare del suo valore tra 1 e n va a selezionare un generico valore x_i. Col tempo impareremo a familiarizzare con tali simboli; saranno utili sopratutto nelle dimostrazioni.