

Ivan Gentile
Matematica per Molti - Volume 5
Copyright© 2018, 1^a edizione

COLOPHON

Nessuna parte di questa pubblicazione può essere, tradotta, riprodotta o trasmessa senza l'autorizzazione dell'autore. Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% del volume. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale possono avvenire, per un numero di pagine non superiori al 15% del volume, solo a seguito di specifica autorizzazione dell'autore.

Questo lavoro è stato realizzato con \LaTeX .

I nomi commerciali, i loghi e i marchi registrati menzionati nel testo appartengono ai rispettivi proprietari.

Nel frontespizio è riprodotto il logo di *Matematica per Molti* di proprietà di Ivan Gentile.

CONTATTI

<http://www.matematicaxmolti.it> - Sito ufficiale
info@matematicaxmolti.it - Email per informazioni

I. Gentile[©]

Ai cinque sensi dati dalla natura ne possiamo aggiungere altri, la
matematica è uno di questi.

— Ivan Gentile

A chi mantiene le promesse.

I. Gentile®

I. Gentile[©]

INDICE

PREFAZIONE	ix
INTRODUZIONE	xiii
1 LIMITI E CONTINUITÀ	1
1.1 Intorni	1
1.2 Punto di accumulazione	2
1.2.1 Derivato di un insieme e insieme chiuso	3
1.3 Aderenza di un insieme	4
1.4 Definizione di limite	5
1.4.1 Limite finito per x che tende a un valore finito	6
1.4.2 Limite finito per x che tende all'infinito	8
1.4.3 Limite infinito per x che tende a valore finito	9
1.4.4 Limite infinito per x che tende all'infinito	10
1.4.5 Definizione generalizzata di limite	11
1.4.6 Convergenza, divergenza, regolarità	12
1.4.7 Unicità del limite	13
1.4.8 Limite per valori maggiori o minori	14
1.4.9 Limite destro e limite sinistro	14
1.4.10 Proprietà del limite	16
1.4.11 Limiti sulle restrizioni	17
1.4.12 Relazione tra regolarità e limitatezza di una funzione	17
1.4.13 Relazione tra regolarità e segno di una funzione	18
1.4.14 Limite del modulo di una funzione	20
1.5 Criteri di regolarità per confronto	23
1.6 Limite di funzioni monotone	25
1.7 Operazioni sui limiti	28
1.7.1 Somma	28
1.7.2 Prodotto di funzioni	32
1.7.3 Limite del quoziente di funzioni	37
1.8 Continuità	42
1.8.1 Limite funzioni composte	43
1.8.2 Continuità a destra e a sinistra	47
1.9 Punti di discontinuità	48
1.9.1 Discontinuità eliminabili	49
1.9.2 Discontinuità di prima specie	49
1.9.3 Discontinuità di seconda specie	49
1.10 Implicazioni della continuità	50
1.11 Condizioni sufficienti alla continuità	50
1.12 Limite di funzioni elementari	51
1.12.1 Potenza di esponente positivo	52
1.12.2 Potenza a esponente reale negativo	52
1.12.3 Potenza a esponente intero positivo	53
1.12.4 Potenza a esponente intero negativo	53
1.12.5 Radice ennesima	54
1.12.6 Polinomi	54
1.12.7 Funzione razionale	55
1.12.8 Funzione esponenziale	56
1.12.9 Funzione logaritmica	56

1.12.10	Funzioni circolari e loro inverse locali	57
1.13	Limite della potenza tra due funzioni	62
1.13.1	Forme indeterminate zero alla zero	63
1.13.2	Forma indeterminata uno all'infinito	63
1.13.3	Forma indeterminata infinito alla zero	64
1.14	Successioni reali o numeriche	67
1.14.1	Successioni monotona	68
1.15	Limite per una successione	68
1.15.1	Teoremi sui limiti delle successioni	69
1.16	Successioni estratte	71
1.16.1	Funzioni composte mediante successioni	72
1.16.2	Condizioni sufficienti alla regolarità di successioni estratte	77
1.17	Numero di Nepero	77
1.18	Limiti fondamentali	79
1.19	Funzioni continue in un insieme	88
1.20	Minimo e massimo limite	95
1.20.1	Minimo e massimo limite per le successioni	100
1.21	Uniforme continuità	102
1.22	Funzioni lipschitziane	107
1.23	Confronto tra infinitesimi e infiniti	108
1.23.1	Infiniti o infinitesimi equivalenti	122
1.24	Riassunto	130
1.24.1	Intorno, punto di accumulazione, aderenza	130
1.24.2	Limite	130
1.24.3	Operazioni sui limiti	132
1.24.4	Continuità	133
1.24.5	Limiti di particolari funzioni	134
1.24.6	Successioni	134
1.24.7	Funzioni continue in un insieme	135
1.24.8	Uniforme continuità	135
1.24.9	Funzioni lipschitziane	136
1.24.10	Confronto tra infinitesimi e infiniti	136
2	CALCOLO DIFFERENZIALE	139
2.1	Derivata	139
2.1.1	Derivata destra e sinistra	141
2.1.2	Relazione tra derivabilità e continuità	142
2.1.3	Interpretazione geometrica	143
2.2	Differenziale	146
2.2.1	Interpretazione geometrica	147
2.2.2	Utilità	148
2.3	Derivate delle funzioni elementari	148
2.4	Regole di derivazione	157
2.5	Derivate e differenziali di ordine superiore	163
2.6	Differenziale di funzioni composte	165
2.7	Punti di monotonia	166
2.8	Estremi relativi	170
2.8.1	Conseguenze del teorema di Lagrange	177
2.8.2	Condizioni sufficienti per gli estremi relativi	179
2.8.3	Procedura per la determinazione degli estremi relativi	185
2.8.4	Ricerca degli estremi assoluti	186
2.9	Concavità, convessità, flessi	189

2.9.1	Funzione concava o convessa in un intervallo	195
2.10	Asintoti	197
2.11	Studio di funzione	203
2.12	Teoremi dell'Hopital	208
2.13	Polinomio di Taylor	214
2.14	Riassunto	226
2.14.1	Derivata e differenziale	226
2.14.2	Punti di monotonia	228
2.14.3	Estremi relativi	229
2.14.4	Asintoti	230
2.14.5	Concavità, convessità, flessi	230
2.14.6	Teoremi dell'Hopital	230
2.14.7	Polinomio di Taylor	231
3	CALCOLO INTEGRALE	233
3.1	Integrale indefinito	233
3.1.1	Integrali indefiniti fondamentali	234
3.2	Formule e regole di integrazione	239
3.2.1	Integrazione funzioni razionali	250
3.2.2	Integrazione per parti	257
3.2.3	Formule di ricorrenza	260
3.2.4	Altri integrali	270
3.2.5	Integrazione per sostituzione	275
3.3	Insiemi dei punti del piano	293
3.4	Misura degli insiemi piani	294
3.5	Rettangoloide	297
3.6	Integrale definito	300
3.6.1	Proprietà	304
3.7	Estensione del concetto di integrale	316
3.8	Sommabilità	322
3.8.1	Criteri di sommabilità	323
3.8.2	Caso intervallo non limitato	329
3.9	Esempi ed esercizi	336
3.10	Riassunto	342
3.10.1	Misura degli insiemi piani	342
3.10.2	Rettangoloide	342
3.10.3	Integrale definito	343
3.10.4	Estensione del concetto di integrale	345
A	PROVE D'ESAME	349
A.1	Anno 2014	350
A.1.1	Problema 1	350
A.1.2	Problema 2	354
A.1.3	Questionario	357
A.2	Anno 2013	361
A.2.1	Problema 1	361
A.2.2	Problema 2	364
A.2.3	Questionario	368
A.3	Anno 2012	374
A.3.1	Problema 1	374
A.3.2	Problema 2	378
A.3.3	Questionario	380

BIBLIOGRAFIA 385

INDICE ANALITICO 387

I. Gentile[©]

PREFAZIONE

Matematica per Molti volume 5 è il libro conclusivo della collana. Tratta gli argomenti che vanno sotto il nome di calcolo infinitesimale. Nelle università gli argomenti di questo libro fanno parte del corso di Analisi Matematica I, infatti la base principale da cui sono partito sono i miei appunti universitari, quindi meriti e demeriti vanno attribuiti alla mia prof.ssa di Matematica. A parte gli scherzi, di libri e corsi di Analisi Matematica ce ne sono infiniti, ma qui troverete condensati tanti concetti in meno pagine e più chiari; in modo “tecnico” posso dire che il mio obiettivo è stato quello di massimizzare la funzione *densità di conoscenza chiara*.

Questo libro è uguale (a meno di piccole correzioni di errori) a quello che prima di settembre del 2018 era il volume 4, quindi se avete acquistato il vecchio volume 4 potete tranquillamente non acquistare questo.

Come conclusione di questa collana devo darvi due notizie, una buona e una cattiva. La buona notizia è che se avrete appreso gli argomenti di tutti i volumi potete contare su un buon bagaglio di conoscenze, avrete sviluppato, almeno in parte, un senso aggiuntivo ai cinque dati dalla natura: il *senso matematico*, che consiste nella capacità di essere rigorosi, precisi, chiari, di avere un occhio razionale sulla natura delle cose. La cattiva notizia è che ci sono ancora tante cose utili e interessanti che non ho messo nei 5 volumi; per chi non studia materie tecnico scientifiche come la Fisica, l'Ingegneria, può accontentarsi di quanto presente in questa collana ma chi invece vuole occuparsi in maniera seria di Fisica o Ingegneria deve sapere che ha ancora tanta strada da fare. Giusto per scoraggiarvi o per incoraggiarvi, dipende dal vostro carattere, vi cito gli argomenti importanti che non troverete in questa collana

- Serie numeriche.
- Studio di funzioni reali di due o tre variabili reali.
- Integrali curvilinei, doppi, tripli.
- Equazioni differenziali.
- Calcolo numerico.
- Funzioni complesse di variabile complessa.
- Trasformata di Laplace, Z-Trasformata, Trasformata di Fourier.
- Funzioni armoniche.
- Distribuzioni.
- Variabili e processi aleatori.
- Ricerca operativa.

Purtroppo non penso di avere ancora tempo e forza per scrivere altri libri sugli argomenti di sopra, anche se nella vita non si sa mai, un po' dipende anche da voi.

Settembre 2018

Ivan Gentile.

I. Gentile[©]

RINGRAZIAMENTI

Più che un ringraziamento devo dare il merito per la stesura di questo volume alla mia prof.ssa di Analisi Matematica dell'Università, in quanto questo volume è, per la gran parte, la trascrizione del suo corso di Analisi Matematica I. Ringrazio, poi, gli autori dei testi [1, 2] che ho consultato per la stesura di questo volume e la comunità di \LaTeX sparsa nel mondo che mi ha permesso di scrivere il libro in formato digitale.

Settembre 2018

I. G.

I. Gentile[©]

I. Gentile[©]

INTRODUZIONE

Gli argomenti di questo libro sono spesso racchiusi sotto il nome di *analisi matematica*; anche se è un nome abbastanza semplice sinceramente lo trovo poco indicativo, in quanto la parola “analisi” mi sembra troppo generica, è vero, infatti, che un’accezione della parola analisi è “la scomposizione di uno studio nelle parti che lo costituiscono”, ma, appunto, mi sembra una definizione che si può applicare a qualsiasi argomento di matematica e non solo quelli che classicamente fanno parte dell’analisi matematica.¹

Più preciso è il termine *calcolo infinitesimale*, perché fa riferimento a procedure e regole che si applicano a cose molto piccole. Quindi possiamo ritenere che *analisi matematica* è sinonimo di *calcolo infinitesimale*.

Il calcolo infinitesimale si basa sul concetto di limite e questo a sua volta è alla base delle definizioni di derivata e integrale. Dunque il testo si presenta con soli tre capitoli: limiti e continuità, calcolo differenziale (che è tutto ciò che ha a che fare con la derivata) e calcolo integrale (tutto ciò che ha a che fare con l’integrale). I capitoli sono abbastanza corposi ma soprattutto il secondo e terzo con poche e semplici dimostrazioni: il grosso della base teorica è nel primo capitolo. Eliminando dimostrazioni ed esempi non è poi tantissimo da imparare, l’importante è farlo bene, sono infatti argomenti molto importanti.

L’appendice presenta lo svolgimento di alcune tracce d’esame di stato della prova di matematica dei licei scientifici. Può essere utile come ripasso di un po’ di tutto quanto visto nei 4 volumi.

Nel testo si adottano diverse convenzioni che è utile specificare:

- Teoremi di dimostrazione non molto lunga, sono indicati semplicemente come “proposizioni”.
- Le parentesi quadre nel testo indicano delle parole lette in alternativa a quelle immediatamente precedenti; ad esempio, scrivendo

L’unione [intersezione] di due insiemi non cambia se si cambia l’ordine degli insiemi.

si intende che valgono entrambe le seguenti affermazioni

- L’unione di due insiemi non cambia se si cambia l’ordine degli insiemi.
- L’intersezione di due insiemi non cambia se si cambia l’ordine degli insiemi.

In pratica è un modo per abbreviare le cose.

- Le soluzioni degli esercizi (laddove presenti) sono indicate tra parentesi quadre sul margine destro o sul margine sinistro in una riga in cui è presente solo la soluzione. Se volete indicazioni o soluzioni degli esercizi (mi rivolgo soprattutto ai docenti) contattatemi all’indirizzo info@matematicaxmolti.it.

¹ Il nome *Analisis* deriva forse dal primo grande trattato di Analisi di Eulero nel 1748 che si intitolava *Introductio in alalysisin infinittorum*.

Di seguito trovate, per comodità, anche la riproposizione delle tabelle, viste nei volumi precedenti (esclusa quella specifica del volume 4 i cui simboli sono adoperati solo in quel volume), con le lettere greche e i simboli matematici; inoltre è stata aggiunta una tabella con i simboli introdotti in questo volume.

Buona matematica!

Lettere Greche.

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
α	alpha	ν	ni
β	beta	ξ	xi (minuscolo)
γ	gamma (minuscola)	Ξ	xi (maiuscolo)
Γ	gamma (maiuscola)	π	pi (greco minuscolo)
δ	delta (minuscola)	Φ	pi (greco maiuscolo)
Δ	delta (maiuscola)	ρ	rò
ϵ	epsilon	σ	sigma
ζ	zita	Σ	Sigma (maiuscolo)
η	eta	τ	tau
θ	theta (minuscola)	φ	phi (minuscolo)
Θ	theta (maiuscola)	Φ	phi (maiuscolo)
ι	iota	ψ	psi (minuscolo)
κ	kappa	Ψ	psi (maiuscolo)
λ	lambda (minuscola)	ω	omega (minuscolo)
Λ	lambda (maiuscola)	Ω	omega (maiuscolo)
μ	mu		

Simboli Matematici.

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
+	somma	-	sottrazione
·	prodotto	×	prodotto
/	divisione	÷	divisione
∑	sommatoria	∏	produttoria
√	radice quadrata	∛	radice n-esima
=	uguale	≈	circa uguale
≐	uguale per definizione	⇔	equivale per definizione
<	minore	≤	minore o uguale
>	maggiore	≥	maggiore o uguale
≪	molto minore	≫	molto maggiore
∧	congiunzione (e)	∨	disgiunzione (o)
	tale che	:	tale che, divisione
≡	equivale	∈	appartiene
∅	insieme vuoto	∞	infinito
∃	esiste	!∃	esiste ed è unico
∪	unione	∩	intersezione
\	differenza (tra insiemi)	∁	complemento
⊂	incluso	⊃	include
⊆	incluso non strettamente	⊇	include non strettamente
ℕ	insieme dei naturali	ℤ	insieme degli interi
ℙ	numeri pari	ℙ	numeri dispari
ℚ	numeri razionali	ℝ	numeri reali
ℝ̄	insieme ampliato dei numeri reali	ℑ	numeri immaginari
ℂ	numeri complessi	∠	angolo tra a e b
⌒	arco tra A e B	↔	coimplicazione materiale
↔	implicazione materiale	⇒	implica
⇒	implica	⇔	equivale, se e solo se
⇔	equivale, se e solo se	¬	negazione
∀	per ogni, qualunque	∧	congiunzione, and
∨	disgiunzione, or	ℑm	parte immaginaria
Re	parte reale	v	modulo del vettore v
x	valore assoluto di x	≐	superfici equivalenti
AB̄	misura del segmento AB		
≅	congruente		

Simboli Matematici introdotti in questo volume.

Simbolo	Nome
I(a, b)	Intervallo di estremi a, b (non si sa chi è più grande tra a e b)
İ	Punti interni all'intervallo I
D(X) o Dr(X)	Derivato di un insieme X
X̄	Aderenza dell'insieme X
l ⁺ [l ⁻]	Limite l per valori maggiori [minori]
X(x ₀ ⁻)	X ∩]-∞; x ₀ [
X(x ₀ ⁺)	X ∩]x ₀ ; +∞[
f(x ₀ ⁻)	lim _{x→x₀⁻} f(x) (limite sinistro in x ₀)
f(x ₀ ⁺)	lim _{x→x₀⁺} f(x) (limite destro in x ₀)
l', lim _{x→x₀} ' f(x)	minimo limite in x ₀
l'', lim _{x→x₀} '' f(x)	massimo limite in x ₀
f'(x), ḟ(x), Df(x), $\frac{df}{dx}$	derivata prima di f(x)
f ⁽ⁿ⁾ (x), D ⁿ f(x), $\frac{d^n f}{dx^n}$	derivata n-esima di f(x)
f ₋ '(x ₀), [D ₋ f(x)] _{x=x₀}	derivata prima sinistra in x ₀
f ₊ '(x ₀), [D ₊ f(x)] _{x=x₀}	derivata prima destra in x ₀
df	differenziale (primo) della funzione f
d ⁿ f	differenziale n-esimo della funzione f
∫ f(x) dx	Integrale indefinito di f(x)
∫ _[a,b] f(x) dx	Integrale di f(x) esteso all'intervallo [a, b]
∫ _a ^b f(x) dx	Integrale definito di f(x) tra a e b
∫ R(f ₁ (x), ..., f _n (x)) dx	Integrale di una funzione razionale di f ₁ (x), ..., f _n (x)