

Ivan Gentile  
*Matematica per Molti - Volume 4*  
Copyright© 2018, 1<sup>a</sup> edizione

#### COLOPHON

Nessuna parte di questa pubblicazione può essere, tradotta, riprodotta o trasmessa senza l'autorizzazione dell'autore. Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% del volume. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale possono avvenire, per un numero di pagine non superiori al 15% del volume, solo a seguito di specifica autorizzazione dell'autore.

Questo lavoro è stato realizzato con  $\text{\LaTeX}$ .

I nomi commerciali, i loghi e i marchi registrati menzionati nel testo appartengono ai rispettivi proprietari.

Nel frontespizio è riprodotto il logo di *Matematica per Molti* di proprietà di Ivan Gentile.

#### CONTATTI

<http://www.matematicaxmolti.it> - Sito ufficiale

[info@matematicaxmolti.it](mailto:info@matematicaxmolti.it) - Email per informazioni

I. Gentile<sup>©</sup>

In matematica non si capiscono le cose. Semplicemente ci si abitua ad esse.

— John von Neumann

A chi riesce a pensare diversamente.

L. Gentile<sup>©</sup>

I. Gentile<sup>©</sup>

# INDICE

PREFAZIONE ix

INTRODUZIONE xiii

1	STRUTTURE ALGEBRICHE	1
1.1	Operazioni tra insiemi	1
1.2	Gruppi	1
1.3	Anelli e campi	5
1.4	N-ple e successioni	8
1.5	L'anello dei polinomi	10
1.6	Il campo dei numeri reali	11
1.7	Il campo dei numeri complessi	12
1.8	Forma algebrica dei numeri complessi	18
1.9	Definizioni e proprietà dei numeri complessi	23
1.10	Coordinate polari nel piano	28
1.11	Rappresentazione geometrica dei numeri complessi	32
1.12	Forma trigonometrica dei numeri complessi	33
1.13	Radici ennesime dei numeri complessi	40
1.14	Forma esponenziale dei numeri complessi	45
1.15	Esercizi sui numeri complessi	47
1.16	Curiosità: la nascita dei numeri complessi	54
1.17	Riassunto	55
2	SPAZI VETTORIALI	61
2.1	Spazi vettoriali	61
2.2	Sottospazi vettoriali	70
2.3	Sistemi di generatori	73
2.4	Dipendenza e indipendenza lineare	80
2.5	Basi e dimensione	84
2.6	Componenti di un vettore	91
2.7	Somma e intersezione di sottospazi	93
3	MATRICI	107
3.1	Generalità	107
3.2	Matrici come spazio vettoriale	112
3.3	Prodotto naturale	116
3.4	Prodotto tra matrici	118
3.5	Classe e segno di una permutazione	121
3.6	Determinante di una matrice quadrata	123
3.6.1	Proprietà del determinante	125
3.7	Matrici ridotte e trasformazioni elementari	132
3.8	Sottomatrici	137
3.8.1	Matrici partizionate	140
3.9	Rango di una matrice	144
3.10	Matrici regolari	149
3.11	Matrici ortogonali	153
3.12	Altre definizioni	158
4	TRASFORMAZIONI LINEARI	161
4.1	Generalità	161
4.2	Proprietà	164
4.3	Equazione e teorema fondamentali	174
4.4	Trasformazioni lineari e strutture algebriche	180

4.5	Matrice associata a una trasformazione lineare	182
4.5.1	Cambiamento di base	189
4.6	Riassunto	195
5	SISTEMI LINEARI	197
5.1	Generalità	197
5.2	Sistemi compatibili	199
5.3	Sistemi omogenei	202
5.4	Sottospazi affini	205
5.5	Soluzioni di un sistema	205
5.6	Sistemi equivalenti	206
5.7	Risoluzione dei sistemi lineari	211
5.7.1	Algoritmo A	214
5.7.2	Algoritmo B: metodo di Gauss-Jordan	216
5.8	Rappresentazione dei sottospazi vettoriali	219
5.9	Riassunto	226
6	AUTOVALORI E AUTOVETTORI	229
6.1	Generalità	229
6.2	Indipendenza	232
6.3	Matrici simili	234
6.4	Polinomio caratteristico	236
6.5	Molteplicità algebrica e geometrica	242
6.6	Diagonalizzazione	243
6.7	Autovettori destri e sinistri	255
7	SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI	259
7.1	Prodotto scalare, norma e distanza	259
7.2	Ortogonalità tra vettori	266
7.3	Basi ortogonali e ortonormali	268
7.4	Complemento ortogonale	275
7.5	Ortogonalità e matrici	282
7.6	Ortogonalità e componenti	284
7.7	Ortogonalità tra sottospazi	286
7.7.1	Casi particolari	291
7.8	Trasformazioni ortogonali	293
7.8.1	Legame con le matrici ortogonali	298
7.9	Prodotto hermitiano	299
7.10	Trasformazioni simmetriche ed hermitiane	301
7.11	Ortogonalizzazione	304
7.12	Norma di una matrice	308
7.13	Forme bilineari e forme quadratiche	309
7.13.1	Metodi per stabilire il segno	313
7.14	Decomposizione in valori singolari	316
8	SPAZI AFFINI	319
8.1	Generalità	319
8.2	Sottospazio affine	324
8.3	Parallelismo e incidenza	328
8.4	Intersezione e unione tra sottospazi	330
8.5	Indipendenza	333
8.6	Riferimenti affini	335
8.7	Trasformazioni affini	339
8.8	Affinità e riferimenti	350
8.9	Rappresentazione delle trasformazioni affini	351
8.10	Rette	359
8.11	Condizioni di parallelismo e incidenza	365

8.12	Proprietà dello spazio congiungente	377
8.13	Fasci di iperpiani	385
8.14	Riassunto	388
8.14.1	Indipendenza	389
8.14.2	Riferimenti affini	389
8.14.3	Trasformazione affine	390
8.14.4	Rappresentazione delle trasformazioni	390
8.14.5	Rette	392
8.14.6	Condizioni di parallelismo e incidenza	392
8.14.7	Fasci di iperpiani	393
9	SPAZI EUCLIDEI	395
9.1	Generalità	395
9.2	Ortogonalità tra sottospazi euclidei	396
9.2.1	Ortogonalità in uno spazio di dimensione tre	401
9.3	Proiezione ortogonale	406
9.4	Distanza euclidea	409
9.4.1	Distanza di un punto da un iperpiano	413
9.4.2	Distanza tra due generici sottospazi	415
9.4.3	Retta di minima distanza	418
9.5	Uguaglianza, congruenza o isometria	420
9.6	Nozioni metriche e affini: considerazioni finali	423
A	ESERCIZI RIEPILOGATIVI	431
	BIBLIOGRAFIA	439
	INDICE ANALITICO	441

I. Gentile<sup>©</sup>

## PREFAZIONE

*Matematica per Molti volume 4*, com'è facilmente intuibile, è il naturale proseguimento del volume 3 quindi tutte le considerazioni fatte nella prefazione dei volumi precedenti (in particolare del volume 1) valgono pari pari. Il modo migliore per studiare questo libro è farlo dopo aver studiato buona parte del primo.

Questo libro (nonostante numericamente è il penultimo) è l'ultimo della collana ad essere stato completato, perché è quello più complesso e astratto; gli argomenti non sono affrontati nelle scuole superiori (oggi dette secondarie di secondo grado) ma solo nelle Università tecnico scientifiche (Ingegneria, Matematica, Fisica, etc.). Avrebbe dovuto essere il volume 3 delle edizioni precedenti a settembre 2018 (quelle in cui gli attuali volumi 1 e 2 erano unite in un solo volume 1) ma non è mai stato completato quindi toccherà a tutti comprarlo, anche se a onor del vero gli argomenti sono da un punto di vista un po' scollegati da quelli degli altri, quindi si può anche studiare per ultimo; tuttavia il consiglio è di comprarlo perché chi studia *Matematica per Molti* vuole fare per bene la Matematica e in tale ottica questo volume è fondamentale.

Vengono generalizzati tutti i concetti visti finora: operazioni, insiemi, vettori, sistemi, figure geometriche; questa generalizzazione, che può sembrare un'inutile complicazione, diventa fondamentale quando si affrontano problemi grossi. Il mio consiglio è studiare questo testo prima possibile perché a forza di leggere e rileggere questi concetti vi entreranno nella testa e costituiranno un bagaglio di conoscenze che non solo vi permetterà di capire bene materie tecnico/scientifiche più avanzate ma di impararle molto più rapidamente.

Io ho cercato di semplificarlo e strutturarlo al massimo rispettando però il rigore che serve per rendere questi argomenti strumenti generali, infatti mi ha portato via tantissimo tempo.

Settembre 2018

Ivan Gentile.

I. Gentile<sup>©</sup>

## RINGRAZIAMENTI

Un doveroso ringraziamento al mio professore di Università di Algebra e Geometria e gli autori dei testi presenti in bibliografia, in particolare ai [1, 2] da cui ho attinto molto per la stesura di questo volume.

Ringrazio anche tutti i lettori che hanno acquistato le edizioni precedenti degli altri volumi, nonostante questo non fosse ancora pronto, e che pazientemente hanno atteso di questo “anello mancante”.

Infine, ringrazio, ancora, la comunità di  $\text{\LaTeX}$  sparsa nel mondo che mi ha permesso di scrivere il libro in formato digitale e in particolare il  $\text{\GUT}$  (Gruppo Utilizzatori Italiani di  $\text{\TeX}$ ).

*Settembre 2018*

I. G.

I. Gentile<sup>©</sup>

I. Gentile<sup>©</sup>

# INTRODUZIONE

Il libro è fatto da 9 capitoli e un'appendice. I primi 6 capitoli trattano dell'*Algebra lineare* perché tutta incentrata sulle trasformazioni e relative operazioni lineari (somma e prodotto). I rimanenti 3 capitoli trattano la *geometria*, in particolare quella *affine* ed *euclidea*, sostanzialmente si definiscono un sistema di assiomi e definizioni per generalizzare la geometria elementare vista nel volume 2.

L'appendice A contiene una serie di esercizi riepilogativi di tutto il libro, sono in pratica prove d'esame universitarie. Il testo non comprende molti esercizi e poi quelli più complessi li ho messi in appendice, in quanto gli argomenti di questo volume sono interessanti quando li si vede come un modo per generalizzare le tante cose che si fanno (operazioni tra insiemi, vettori, geometria, sistemi di equazioni, ...) quindi, ritengo, che sia più interessante la teoria che gli esercizi; questi si faranno in casi concreti quando i concetti saranno applicati alle specifiche materie (teoria dei sistemi, meccanica, etc.).

Mi tocca segnalare che nonostante il testo sia abbastanza voluminoso ci sono argomenti di geometria che hanno una loro importanza che non sono affrontati in questo volume come orientazione, semispazi, semplici, simmetrie eccetera, senza contare altri tipi di geometria (come quella proiettiva, quella iperbolica, eccetera). I motivi sono dovuti allo spazio a disposizione ma anche al fatto che si va in argomenti sempre più specialistici di cui non sono sufficientemente competente; inoltre, comunque, gli argomenti di interesse non trattati spesso vengono ripresi, anche se in modo meno generale, in corsi specifici (come per esempio le definizioni di coseni direttori, di prodotto vettoriale, etc.) in modo più che sufficiente alla stragrande maggioranza dei casi.

Nel testo si adottano diverse convenzioni che è utile specificare:

- Teoremi di dimostrazione non molto lunga, li ho indicati semplicemente come "proposizioni".
- Le parentesi quadre nel testo indicano delle parole lette in alternativa a quelle immediatamente precedenti; ad esempio, scrivendo

L'unione [intersezione] di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.

si intende che valgono entrambe le seguenti affermazioni

- L'*unione* di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.
- L'*intersezione* di due insiemi non cambia se si cambia l'ordine degli insiemi.

In pratica è un modo per abbreviare le cose.

- Le soluzioni degli esercizi (laddove presenti) sono indicate tra parentesi quadre sul margine destro o sul margine sinistro in una riga in cui è presente solo la soluzione. Se volete indicazioni o soluzioni degli esercizi (mi rivolgo soprattutto ai docenti) contattatemi all'indirizzo [info@matematicaxmolti.it](mailto:info@matematicaxmolti.it).

Di seguito trovate, per comodità, anche la riproposizione delle tabelle, viste nei volumi precedenti, con le lettere greche e i simboli matematici. Inoltre è stata aggiunta una tabella per i tanti simboli e operatori che introdurremo in questo volume.

Buona matematica!

Lettere Greche.

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$\alpha$	alpha	$\nu$	ni
$\beta$	beta	$\xi$	xi (minuscolo)
$\gamma$	gamma (minuscola)	$\Xi$	xi (maiuscolo)
$\Gamma$	gamma (maiuscola)	$\pi$	pi (greco minuscolo)
$\delta$	delta (minuscola)	$\Phi$	pi (greco maiuscolo)
$\Delta$	delta (maiuscola)	$\rho$	rò
$\epsilon$	epsilon	$\sigma$	sigma
$\zeta$	zita	$\Sigma$	Sigma (maiuscolo)
$\eta$	eta	$\tau$	tau
$\vartheta$	theta (minuscola)	$\varphi$	phi (minuscolo)
$\Theta$	theta (maiuscola)	$\Phi$	phi (maiuscolo)
$\iota$	iota	$\psi$	psi (minuscolo)
$\kappa$	kappa	$\Psi$	psi (maiuscolo)
$\lambda$	lambda (minuscola)	$\omega$	omega (minuscolo)
$\Lambda$	lambda (maiuscola)	$\Omega$	omega (maiuscolo)
$\mu$	mu		

Simboli Matematici.

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
+	somma	-	sottrazione
·	prodotto	×	prodotto
/	divisione	÷	divisione
$\sum$	sommatoria	$\prod$	produttoria
$\sqrt{\quad}$	radice quadrata	$\sqrt[n]{\quad}$	radice n-esima
=	uguale	$\approx$	circa uguale
$\triangleq$	uguale per definizione	$\triangleq$	equivale per definizione
<	minore	$\leq$	minore o uguale
>	maggiore	$\leq$	maggiore o uguale
$\ll$	molto minore	$\gg$	molto maggiore
	tale che	:	tale che, divisione
$\equiv$	equivale	$\in$	appartiene
$\emptyset$	insieme vuoto	$\infty$	infinito
$\exists$	esiste	$!\exists$	esiste ed è unico
$\cup$	unione	$\cap$	intersezione
$\setminus$	differenza (tra insiemi)	$\complement$	complemento
$\subset$	incluso	$\supset$	include
$\subseteq$	incluso non strettamente	$\supseteq$	include non strettamente
$\mathbb{N}$	insieme dei naturali	$\mathbb{Z}$	insieme degli interi
$\mathbb{P}$	numeri pari	$\mathbb{D}$	numeri dispari
$\mathbb{Q}$	numeri razionali	$\mathbb{R}$	numeri reali
$\overline{\mathbb{R}}$	insieme ampliato dei numeri reali	$\mathbb{I}$	numeri immaginari
$\mathbb{C}$	numeri complessi	$\widehat{ab}$	angolo tra a e b
$\overline{AB}$	arco tra A e B	$\leftrightarrow$	coimplicazione materiale
$\leftarrow$	implicazione materiale	$\Rightarrow$	implica
$\Rightarrow$	implica	$\Leftrightarrow$	equivale, se e solo se
$\Leftrightarrow$	equivale, se e solo se	$\neg$	negazione
$\forall$	per ogni, qualunque	$\wedge$	congiunzione, and
$\vee$	disgiunzione, or	$\text{Im}$	parte immaginaria
$\text{Re}$	parte reale	$ v $	modulo del vettore $v$
$ x $	valore assoluto di $x$	$\doteq$	superfici equivalenti
$\overline{AB}$	misura del segmento AB		
$\cong$	congruente		

Simboli di Insiemi o operatori.

Simbolo	Nome
$\text{Re}(z)$	Parte reale del numero complesso $z$
$\text{Im}(z)$	Coefficiente dell'immaginaria del numero complesso $z$
$\bar{z}, z^*$	Coniugato del numero complesso $z$
$\arg z, \angle z$	argomento o fase del numero complesso $z$
$\text{Arg } z$	argomento principale del numero complesso $z$
$[\rho, \vartheta]$	forma trigonometrica di un numero complesso
$\text{Id}$	Funzione identica
$L(X), \text{Span}(X)$	chiusura lineare o spazio generato da $X$
$\dim V$	dimensione dello spazio vettoriale $V$
$\bar{B}$	base canonica o naturale di $\mathbb{K}^n$
$W_1 \oplus W_2$	somma diretta degli spazi vettoriali $W_1$ e $W_2$
$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$	insieme delle matrici di ordine $m \times n$ sul campo $\mathbb{K}$
$A^T$	trasposta della matrice $A$
$A^*$	coniugata trasposta della matrice $A$
$\text{diag}(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n})$	matrice diagonale con diagonale principale $a_{1,1}, \dots, a_{1,n}$
$\delta_{ij}$	simbolo di Kronecker
$D_n(\mathbb{K})$	insieme delle matrici diagonali sul campo $\mathbb{K}$
$T_n^s(\mathbb{K})$	insieme delle matrici triangolari superiori sul campo $\mathbb{K}$
$T_n^i(\mathbb{K})$	insieme delle matrici triangolari inferiori sul campo $\mathbb{K}$
$AS_n(\mathbb{K})$	insieme delle matrici antisimmetriche sul campo $\mathbb{K}$
$\langle a, b \rangle, a \times b$	prodotto scalare, naturale o canonico tra $n$ -ple
$GL_n(\mathbb{K})$	gruppo delle matrici regolari di ordine $n$ sul campo $\mathbb{K}$
$\det A,  A , \det T$	determinante della matrice $A$ [dell'endomorfismo $T$ ]
$A(i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_k)$	matrice estratta dalla matrice $A$
$M_{ij}, M_j^i$	minore complementare dell'elemento $a_{ij}$
$A_j^i, A_{ij}$	complemento algebrico di $a_{ij}$
$\text{agg } A, \text{Agg } A$	aggiunta della matrice $A$
$\rho(A), [\rho(T)]$	rango della matrice $A$ [della trasformazione lineare $T$ ]
$\Theta_n(\mathbb{K})$	gruppo delle matrici ortogonali di ordine $n$ sul campo $\mathbb{K}$
$\text{Im } T, \mathcal{R}(T) [\mathcal{R}(A)]$	spazio immagine, campo o range della trasformazione lineare $T$ [della matrice $A$ ]
$\text{Ker } T, \mathcal{N}(T) [\text{Ker } A, \mathcal{N}(A)]$	nucleo della trasformazione lineare $T$ [della matrice $A$ ]
$L(V, W)$	insieme delle trasformazioni lineari di $V$ in $W$
$\text{End}(V)$	insieme degli endomorfismi su $V$
$\text{Aut}(V)$	insieme degli automorfismi su $V$
$M_{B, B'}(T)$	matrice associata a $T$ rispetto alle basi $B$ e $B'$
$M_B(T)$	matrice associata all'endomorfismo $T$ rispetto alla base $B$
$\text{Sol } S$	spazio delle soluzioni del sistema lineare $S$
$p_A(\lambda)$	polinomio caratteristico dalla matrice o della trasformazione $A$
$\text{mg}(\lambda), \text{ma}(\lambda)$	Molteplicità geometrica [algebraica] dell'autovalore $\lambda$
$\langle u, v \rangle$	prodotto scalare tra i vettori $u, v$
$\ v\  [\ A\ ]$	norma del vettore $v$ [della matrice $A$ ]
$d(x, y)$	distanza tra i punti $x, y$
$X^\perp$	complemento ortogonale dell'insieme $X$
$W^{c\perp}$	complemento ortogonale nel congiungente
$\text{Ort}(V)$	insieme di tutti gli isomorfismi ortogonali di $V$ in se
$\Sigma$	insieme dei punti della geometria elementare
$\bar{\Sigma}$	Insieme dei vettori liberi dello spazio della geometria elementare
$\pi(P, Q)$	applicazione che a una coppia di punti associa il vettore libero $\overrightarrow{PQ}$
$\pi_P(\vec{v})$	isomorfismo di struttura
$\mathcal{A}_P$	spazio tangente in $P$
$[X]$	spazio (affine) generato
$C(X, Y)$	spazio (affine) congiungente
$\text{Aff}(A)$	gruppo delle affinità di $A$
$F(\mathcal{A}_{n-2})$	fascio di iperpiani di base $\mathcal{A}_{n-2}$
$\mathcal{E}_n$	spazio euclideo di dimensione $n$
$\mathcal{U}(\mathcal{E}_n)$	gruppo delle affinità di $\mathcal{E}_n$