3 FUNZIONI NUMERICHE

In questo capitolo saranno analizzate particolari funzioni che rivestono un ruolo fondamentale nell'analisi matematica. Sono le funzioni numeriche, in cui dominio e codominio sono insiemi numerici. In questo modo si possono sfruttare tutte le conoscenze sui numeri e sull'algebra letterale per fare considerazioni e ricavare proprietà delle funzioni.

Si riprenderanno diverse definizioni date nel capitolo 2 particolarizzandole alle funzioni numeriche e si daranno tante nuove definizioni che si applicano esclusivamente alle funzioni numeriche.

3.1 FUNZIONI NUMERICHE E ANALITICHE

Consideriamo una generica applicazione $f\colon A \to B$, se A e B sono insiemi numerici (come ad esempio $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o loro sottoinsiemi) si dice che f è una *funzione numerica*. Spesso si tralascia l'aggettivo "numeriche" perché è chiaro dal contesto.

Tra le funzioni numeriche rivestono particolare interesse le cosiddette *funzioni analitiche* o *funzioni matematiche*, in cui l'immagine $y = f(x)$ del generico elemento del dominio x si può esprimere attraverso un numero finito di operazioni matematiche (somme, moltiplicazioni, divisioni, elevamento a potenza, eccetera). La formula fatta da operazioni matematiche che restituisce il valore della funzione è detta *espressione (analitica)* o *equazione* della funzione.

Esempio 3.1. La funzione che dato un numero ne calcola il cubo è una funzione analitica, perché si può scrivere attraverso l'operazione di potenza

$$f\colon x \in \mathbb{R} \to y = x^3 \in \mathbb{R}.$$

Quindi f ha equazione $y = x^3$.

Non sempre una funzione numerica è analitica, per esempio molto utilizzate nelle scienze sperimentali sono le funzioni *empiriche* che sono funzioni numeriche in cui il valore $f(x)$ è ottenuto per mezzo di misurazioni sperimentali. Si pensi, per esempio, all'effettuazione, per esempio ogni ora, di una misura della temperatura nell'arco di una giornata di una città, alla fine abbiamo una tabella di valori con l'ora del giorno e la corrispondente temperatura; questa è una funzione numerica ma non analitica perché non è possibile ottenere il valore di temperatura con una legge prefissata (a meno che non ci si accontenti di approssimazioni).

Le più importanti e semplici funzioni numeriche che si incontrano nelle matematiche applicate sono funzioni definite in insiemi di numeri reali ed assumenti valori reali, prendono perciò il nome di *funzioni reali di una variabile reale*. È di queste funzioni che ci occuperemo in questo capitolo e in molti dei capitoli successivi.

Osservazione 3.1. Nel seguito, parlando di funzioni numeriche, intenderemo salvo avviso contrario le funzioni analitiche reali di variabile reale.

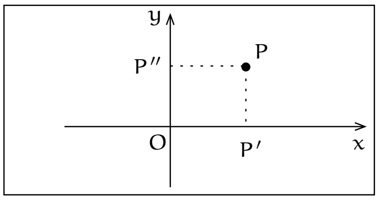


Figura 3.1: Rappresentazione geometrica in $\mathbb{R}^2$.

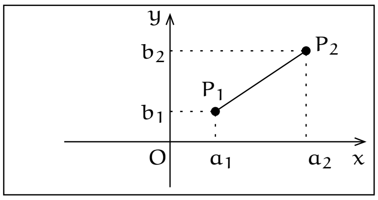


Figura 3.2: Distanza tra punti del piano.

3.2 RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DI $\mathbb{R}^2$

Come i numeri reali si rappresentano geometricamente su una retta, così gli elementi dell'insieme $\mathbb{R}^2$, cioè le coppie ordinate di numeri reali, si possono rappresentare su un piano.

Fissati (figura 3.1) in un piano un punto O, che si chiama *origine*, e una coppia Ox, Oy, di assi ortogonali passanti per O, si assegni su ciascuno di tali assi un'unità di misura. Per ogni punto P del piano, indichiamo con P' e P'' le proiezioni ortogonali di P rispettivamente sull'asse Ox, e sull'asse Oy; il punto P' è allora l'immagine di un numero reale a rispetto al riferimento assunto sull'asse Ox, e il punto P'' è l'immagine di un numero reale b rispetto al riferimento assunto sull'asse Oy.

In tal modo ad ogni punto del piano P resta associata una coppia ordinata (a, b) di numeri reali, ossia un elemento di $\mathbb{R}^2$. I due numeri a, b si chiamano le *coordinate cartesiane (ortogonali)* del punto P, e si dicono rispettivamente l'*ascissa* e l'*ordinata* di P, rispetto al *sistema di coordinate cartesiane (ortogonali)* (O, x, y) o al *riferimento cartesiano* (O, x, y). Conseguentemente l'asse Ox si chiama *asse delle ascisse* (o *asse delle* x), e l'asse Oy si chiama *asse delle ordinate* (o *asse delle* y).

Viceversa, assegnata una coppia (a, b) di numeri reali, esiste uno ed un sol punto P del piano avente per ascissa a e per ordinata b; *il punto* P *è l'immagine, sul piano, dell'elemento* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

La corrispondenza tra gli elementi di $\mathbb{R}^2$ e le loro immagini sul piano fornisce la *rappresentazione geometrica* degli elementi di $\mathbb{R}^2$. Il piano, dunque, quando vi sia fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali, si presenta come un modello geometrico dell'insieme $\mathbb{R}^2$.

Quando sui due assi si assume la stessa unità di misura, il sistema di coordinate cartesiane viene detto *monometrico*. È a sistemi siffatti che abitualmente ci si riferisce, salvo casi in cui particolari esigenze di carattere grafico rendono preferibile l'adozione, sui due assi, di due unità di misura differenti. Noi supporremo d'ora in poi, salvo avviso contrario, che il sistema di riferimento sia monometrico.

È facile allora constatare (figura 3.2), mediante il teorema di Pitagora (volume 1) che se P_1 e P_2 sono due punti del piano, di coordinate rispettive (a_1, b_1) e (a_2, b_2), la lunghezza $\overline{P_1P_2}$ del segmento P_1P_2 è espressa da:

$$\boxed{\overline{P_1P_2} = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}} \tag{3.1}$$

per tale motivo il secondo membro della precedente si chiama *distanza degli elementi* (a_1, b_1) e (a_2, b_2) di $\mathbb{R}^2$. Si noti come la formula indicata vale anche nel caso particolare che il segmento sia parallelo all'asse x o nel caso in cui il segmento sia parallelo all'asse y (in tali casi il teorema di Pitagora non si può applicare perché non c'è nessun triangolo), infatti sei punti sono

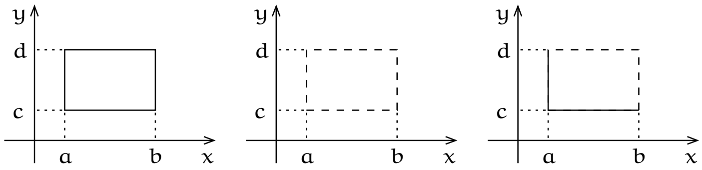


Figura 3.3: Rappresentazione geometrica di prodotti cartesiani di intervalli limitati.

allineati su una parallela dell'asse x vuol dire che hanno stessa ordinata ($b_1 = b_2$) e quindi la (3.1) diventa (ricordando che $\sqrt{x^2} = |x|$)

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(a_1 - a_2)^2} = |a_1 - a_2|$$

che è proprio la distanza tra P_1 e P_2. Analogamente sei punti sono allineati su una parallela dell'asse y vuol dire che hanno stessa ascissa ($a_1 = a_2$) e quindi la (3.1) diventa

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(b_1 - b_2)^2} = |b_1 - b_2|$$

Come già abbiamo fatto a proposito della rappresentazione geometrica dei numeri reali, anche per quanto riguarda l'insieme $\mathbb{R}^2$ avvertiamo che si usa abitualmente identificare gli elementi di $\mathbb{R}^2$ con le loro immagini sul piano; conseguentemente gli elementi di $\mathbb{R}^2$ si chiamano anche *punti* di $\mathbb{R}^2$, e i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ si chiamano anche *insiemi di punti del piano*.

In genere, sul piano del disegno, l'asse delle ascisse si assume orizzontale ed orientato in modo che il verso positivo proceda da sinistra verso destra, e l'asse delle ordinate (di conseguenza verticale perché ortogonale a quello delle ascisse) orientato in modo che il verso positivo proceda dal basso verso l'alto.

Utilizzando la rappresentazione geometrica, è facile visualizzare esempi di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ e, in particolare, di prodotti cartesiani di due insiemi numerici.

Esempio 3.2. Dato un numero reale $r > 0$, l'insieme degli elementi (x, y) di $\mathbb{R}^2$ le cui coordinate verificano la disuguaglianza:

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2$$

è rappresentato geometricamente dal cerchio col centro nell'origine e raggio r: invero la precedente esprime il fatto che la distanza dei punti (x, y) e $(0, 0)$ non supera r.

Esempio 3.3. Dato un numero reale $r > 0$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 > r^2 \,\}$$

è rappresentato geometricamente dai punti esterni el cerchio con centro nell'origine e raggio r.

Esempio 3.4. Se (a, b) e (c, d) sono due intervalli non vuoti di $\mathbb{R}^2$, rappresentati rispettivamente il primo sull'asse x e il secondo sull'asse y, i prodotti cartesiani:

$$[a, b] \times [c, d] \qquad]a, b[\times]c, d[\qquad [a, b[\times [c, d[$$

sono rappresentati geometricamente sul piano, dal rettangolo che si proietta ortogonalmente sugli assi negli intervalli (a, b) e (c, d); precisamente

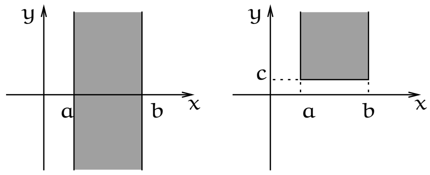


Figura 3.4: Rappresentazione geometrica di prodotti cartesiani con intervalli illimitati.

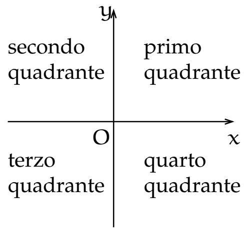


Figura 3.5: Quadranti.

(figura 3.3), l'immagine del primo insieme sul piano è il rettangolo suddetto comprensivo dei lati (rettangolo chiuso), l'immagine del secondo è il rettangolo privato dei lati (rettangolo aperto), l'immagine del terzo è il rettangolo privato del lato verticale destro e del lato orizzontale superiore (rettangolo semiaperto superiormente).

Esempio 3.5. Se (a, b) è un intervallo di $\mathbb{R}$, rappresentato sull'asse x e $[c, +\infty[$ è un intervallo illimitato rappresentato sull'asse y, i prodotto cartesiani:

$$[a, b] \times \,]-\infty, +\infty[\qquad [a, b] \times [c, +\infty[$$

sono rappresentati geometricamente sul piano dagli insiemi dei punti in figura 3.4 (*striscia chiusa* e *semistriscia chiusa*).

In un sistema cartesiano ortogonale (O, x, y), si chiama *quadrante* una delle quattro zone delimitate dagli assi x e y, in particolare (figura 3.5)

- *primo quadrante*: è la parte del piano fatta dai punti di ascissa x e ordinata y entrambe positive;
- *secondo quadrante*: è la parte del piano fatta dai punti di ascissa x negativa e ordinata y positiva;
- *terzo quadrante*: è la parte del piano fatta dai punti di ascissa x e ordinata y entrambe negative;
- *quarto quadrante*: è la parte del piano fatta dai punti di ascissa x positiva e ordinata y negativa.

3.3 RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA

Una funzione (numerica o non) si può rappresentare graficamente ovvero con un disegno che aiuta a metterne in evidenza caratteristiche e proprietà. Nel paragrafo 2.1.1 a pagina 18 si è vista la rappresentazione sagittale che è una generica rappresentazione geometrica.

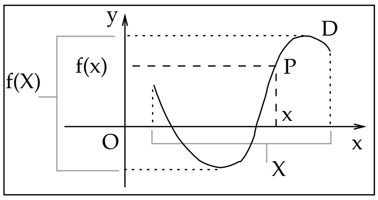


Figura 3.6: Diagramma di una funzione.

Esistono altre rappresentazioni geometriche di una funzione adatte a specifici scopi. Un elenco sicuramente incompleto è il seguente: diagramma cartesiano, istogramma, diagramma polare, diagramma logaritmico, diagramma semilogaritmico, ortogrammi (o diagrammi a canne d'organo), cartogrammi, ideogrammi, settori circolari, diagrammi a tre dimensioni (o stereogrammi).

Per le funzioni numeriche (in particolare per quelle reali di variabili reali) la rappresentazione più importante è sicuramente il diagramma cartesiano. I diagrammi logaritmico, semilogaritmico, polare trovano applicazioni spesso in campi specifici della tecnica. L'istogramma è molto adoperato nelle scienze statistiche.

Tutte le rappresentazioni menzionate, esclusi i diagrammi a tre dimensioni, fanno parte della categoria dei *diagrammi a due dimensioni* in quanto rappresentabili in uno spazio fatto da due dimensioni, diciamole *altezza* e *larghezza*, come può essere un foglio di carta o lo schermo di un computer. Ci sono funzioni (numeriche o non) che per essere rappresentate richiedono uno spazio a tre dimensioni, diciamole *altezza*, *larghezza*, *profondità*, come quello in cui si svolge la nostra vita. Per rappresentare una tale funzione su uno spazio a due dimensioni (come un foglio di carta) è necessario ricorrere a dei trucchi ottici come la prospettiva. In questo testo *non* tratteremo *diagrammi a tre dimensioni*.

3.3.1 Diagramma cartesiano

La convenzione introdotta nel volume 1, di rappresentare i numeri reali su una retta e di identificare ogni numero con la propria immagine, si rileva particolarmente efficace nello studio delle funzioni reali di variabile reale.

Se f è una funzione reale definita nel sottoinsieme X di $\mathbb{R}$, ad ogni $x \in X$ risulta associato un numero reale, $f(x)$, sicché la coppia ordinata $(x, f(x))$ è un elemento di $\mathbb{R}^2$, che prende il nome di *grafico* della funzione f.

Poiché gli elementi di $\mathbb{R}^2$ si possono rappresentare geometricamente su un piano, è possibile, mediante tale rappresentazione, costruire un modello geometrico del grafico di f.

Assunto, in un piano, un sistema di assi cartesiani ortogonali (O, x, y) (figura 3.6) si rappresenti sull'asse delle x l'insieme di definizione X della f; per ogni $x \in X$ si rappresenti quindi, sull'asse delle y, il valore $f(x)$, e si consideri il punto P di ascissa x e di ordinata $f(x)$. Al variare di x in X, il punto P descrive un insieme $\mathcal{D}$ di punti del piano, che si chiama *diagramma cartesiano*, o semplicemente *diagramma*, della funzione f.

Il diagramma spesso si chiama anche (se un po' impropriamente) grafico della funzione, locuzione questa che identifica il grafico sopra definito con la sua immagine geometrica; esso si proietta ortogonalmente sull'asse x nell'insieme di esistenza X della funzione f, e sull'asse delle y nel codominio $f(X)$.

Quindi il grafico è l'insieme delle coppie $(x, f(x))$, in simboli:

$$G \triangleq \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in X \text{ e } y = f(x) \}$$

mentre *il diagramma è la rappresentazione geometrica del grafico*. Per tale motivo il digramma $\mathcal{D}$ si chiama anche il *luogo geometrico di equazione*:

$$y = f(x) \tag{3.2}$$

Da qui, poiché ovviamente assegnare il grafico di una funzione equivale ad assegnare la funzione stessa, deriva la consuetudine di designare anche quest'ultima con la scrittura (3.2). Ne consegue la locuzione di uso corrente "la funzione $y = f(x)$", che traduce in forma abbreviata la locuzione più precisa "la funzione il cui diagramma ha equazione $y = f(x)$".

Nella (3.2) i simboli x e y denotano coppie di valori corrispondenti. Se la variabile x descrive l'insieme di definizione di f, la y descrive conseguentemente il codominio, percorrendolo, per così dire, in un certo modo determinato dalla corrispondenza f. Tale circostanza si sintetizza efficacemente dicendo che nella (3.2) x è la *variabile indipendente*, perché noi assegnamo un valore qualsiasi a x, purché appartenga al dominio della f, "senza dipendere da niente", ed y è la *variabile dipendente* (da x), perché il valore di y dipende dal valore di x scelto arbitrariamente (e da f). Talvolta si dice anche, con lo stesso significato, che la variabile y è espressa in *funzione* della variabile x.

Da quanto si è detto emerge l'utilità pratica della costruzione del diagramma di una funzione. Se ad esempio, l'equazione $y = f(x)$ rappresenta la legge di un fenomeno naturale, il tracciamento del diagramma e l'interpretazione di esso (o, come suol dirsi, la lettura del diagramma) consentono di visualizzare l'andamento della funzione.

Nei casi più semplici il diagramma di una funzione si presenta come una linea (naturalmente per definizione di funzione, intersecata in un sol punto con ogni parallela all'asse y passante per un punto del suo insieme di definizione) o come l'unione di più linee siffatte. Peraltro è bene avvertire che non sempre il diagramma ha una configurazione così semplice; in certi altri casi è addirittura impossibile disegnarlo.

3.4 GEOMETRIA ANALITICA

Nel volume 2 abbiamo studiato la *geometria razionale* ovvero si sono trovate le proprietà delle figure geometriche con ragionamenti (da qui l'aggettivo "razionale") che si sviluppano "all'interno" della geometria stessa, partendo cioè dai postulati. Questo modo di procedere è detto talvolta *metodo sintetico*.

Avendo però introdotto una corrispondenza biunivoca tra punti del piano cartesiano ed elementi di $\mathbb{R}^2$ (coppie di numeri reali) è possibile studiare la geometria e le sue proprietà anche attraverso le conoscenze che abbiamo sui numeri, quindi con l'algebra. Quando la geometria è studiata attraverso le conoscenze che si hanno sui numeri, quindi con *metodo analitico*, si parla di *geometria analitica*.

Il metodo analitico è stato sviluppato nella prima metà del XVII secolo per merito soprattutto di Fermat e Cartesio, e spesso permette di trovare proprietà geometriche e risolvere numerose applicazioni nel campo tecnico-scientifico in maniera molto più semplice del metodo sintetico.

Nella volume 2 abbiamo fatto un cenno anche alla geometria nello spazio (geometria solida), ma per quanto riguarda la geometria analitica tratteremo solo la geometria analitica *nel piano*.[1]

Ricordiamo (volume 2) che in geometria si chiama *luogo geometrico* piano l'insieme di tutti e soli i punti del piano che godono di una certa proprietà. Si pensi all'asse di un segmento, che è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi, alla circonferenza che è l'insieme dei punti equidistanti da un centro, eccetera.

Avendo stabilito una corrispondenza biunivoca tra punti del piano e coppie di $\mathbb{R}^2$, ogni proprietà dei punti di un luogo può essere tradotta da una relazione algebrica tra l'ascissa e l'ordinata dei punti della figura, cioè in un'equazione del tipo

$$F(x, y) = 0 \tag{3.3}$$

dove $F(x, y)$ è una espressione matematica che mette in relazione x e y. Quindi la geometria analitica si occupa di caratterizzare un luogo geometrico con equazioni del tipo (3.3). La (3.3) è detta *equazione del luogo*, ed ovviamente se indichiamo con Γ il generico luogo geometrico caratterizzato dall'equazione (3.3) vale la seguente equivalenza

$$P(x, y) \in \Gamma \iff F(x, y) = 0$$

e cioè condizione necessaria e sufficiente affinché un punto $P(x, y)$ (di coordinate x, y) appartenga ad luogo Γ è che le sue coordinate soddisfino l'equazione del luogo.

Esempio 3.6. Determinare l'equazione del luogo dei punti equidistanti dai punti $A \equiv (-1, 1)$ e $B \equiv (2, 0)$, determinare cioè l'asse del segmento AB.

Svolgimento. Indichiamo con (x, y) le coordinate del generico punto P del luogo. La proprietà caratteristica di cui godono tutti e soli i punti del luogo richiesta è quella di essere equidistanti da A e B, cioè

$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

Ricordando la formula della distanza tra due punti (la (3.1) di pagina 54) la precedente diventa

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \\ &\iff \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 0 \end{aligned}$$

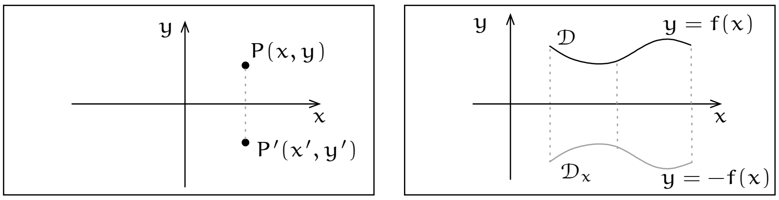
In cui l'espressione $F(x, y)$ che mette in relazione x e y nel nostro caso è

$$F(x, y) = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

Ovviamente sfruttando le proprietà dell'algebra spesso si può arrivare a una forma più "comoda" di $F(x, y)$ per esempio nel nostro caso elevando a quadrato primo e secondo membro

$$\begin{aligned} &(x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + y^2 \\ &\iff x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ &\iff 6x - 2y - 2 = 0 \end{aligned}$$

1 La geometria analitica nello spazio richiede ovviamente l'introduzione di uno spazio cartesiano a tre dimensioni, quindi elementi di $\mathbb{R}^3$.



(a) Di un punto. (b) Di una funzione.

Figura 3.7: Simmetria rispetto all'asse x.

in cui quindi $F(x, y)$ assume la forma più compatta

$$F(x, y) = 6x - 2y - 2$$

□

Riprenderemo il discorso sulla geometria analitica nel capitolo 4 per studiare alcuni luoghi di notevole interesse (retta, circonferenza, parabola, ellisse, iperbole).

3.5 TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

È importante capire come le *trasformazioni geometriche* viste nel capitolo 4 del volume 2 si traducono analiticamente per le funzioni, per esempio se abbiamo una funzione con relativo diagramma, che equazione ha la sua simmetrica rispetto all'asse x?

In questo paragrafo ci concentreremo solo sulle simmetrie perché quelle più importanti dal punto di vista pratico (e anche le più semplici) ma il discorso si potrebbe fare per tutte le altre trasformazioni geometriche.

3.5.1 Simmetria rispetto all'asse x

Sia $P(x, y)$ un punto del piano cartesiano. Se ad esso applichiamo una *simmetria* σ_x (assiale) rispetto all'esse x otteniamo un punto $P'(x', y')$ che ha stessa ascissa e ordinata opposta come si vede dalla figura 3.7a; pertanto le equazioni si questa trasformazione sono

$$\sigma_x \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \tag{3.4}$$

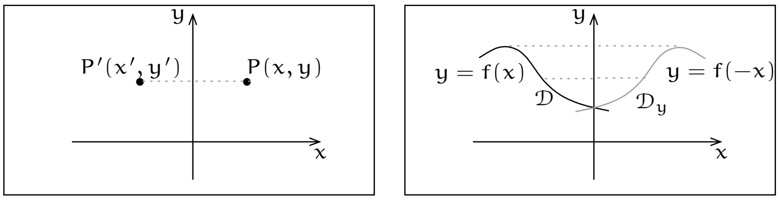
In base a quanto detto se abbiamo una funzione $y = f(x)$ di diagramma $\mathcal{D}$ e a questo diagramma ne facciamo il simmetrico rispetto all'asse x (figura 3.7b), diciamolo $\mathcal{D}_x$, l'equazione che ha come diagramma $\mathcal{D}_x$ sarà

$$y = -f(x)$$

infatti in base alla (3.4) ad x va sostituito x stesso e ad y il suo opposto, ottenendo $-y = f(x)$ e cioè $y = f(x)$.

Esempio 3.7. Data la funzione $y = 2x^2$ scrivere l'equazione della sua simmetrica rispetto all'asse x.

Svolgimento. Essa è banalmente $y = -2x^2$. □



(a) (b)

Figura 3.8: Simmetria rispetto all'asse y.

3.5.2 Simmetria rispetto all'asse y

Sia $P(x, y)$ un punto del piano cartesiano. Se ad esso applichiamo una *simmetria* σ_y (assiale) rispetto all'esse y otteniamo un punto $P'(x', y')$ che ha stessa ordinata e ascissa opposta come si vede dalla figura 3.8a; pertanto le equazioni si questa trasformazione sono

$$\sigma_y \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \tag{3.5}$$

In base a quanto detto se abbiamo una funzione $y = f(x)$ di diagramma $\mathcal{D}$ e a questo diagramma ne facciamo il simmetrico rispetto all'asse y (figura 3.7b), diciamaolo $\mathcal{D}_y$, l'equazione che ha come diagramma $\mathcal{D}_y$ sarà

$$y = f(-x)$$

infatti in base alla (3.4) ad y va sostituito y stesso e ad x il suo opposto.

Esempio 3.8. Data la funzione $y = x + 1$ scrivere l'equazione della sua simmetrica rispetto all'asse y.

Soluzione. Essa è banalmente $y = -x + 1$.

3.5.3 Simmetria rispetto alla bisettrici dei quadranti

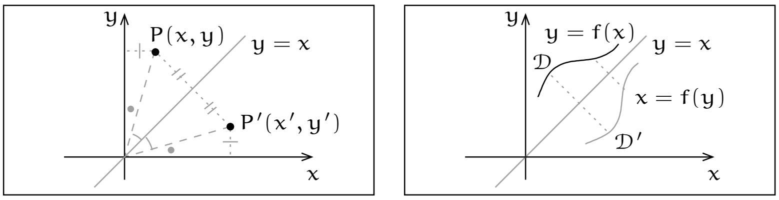
Le bisettrici dei quadranti del piano cartesiano sono 2, e sono

- la *bisettrice* del I e del III quadrante, che è una retta di equazione $y = x$, infatti è la retta caratterizzata dal fatto che ogni suo punto ha uguali ascissa e ordinata.
- la *bisettrice* del II e del IV quadrante, che è una retta di equazione $y = -x$, infatti è la retta caratterizzata dal fatto che ogni suo punto ha ascissa opposto dall'ordinata.

Sia $P(x, y)$ un punto del piano cartesiano. Se ad esso applichiamo una *simmetria* $\sigma_{y=x}$ (assiale) rispetto alla bisettrice $y = x$ otteniamo un punto $P'(x', y')$ che ha come ascissa l'ordinata di P e come ordinata l'ascissa di P, come si vede dalla figura 3.9a;[2] pertanto le equazioni di questa trasformazione sono

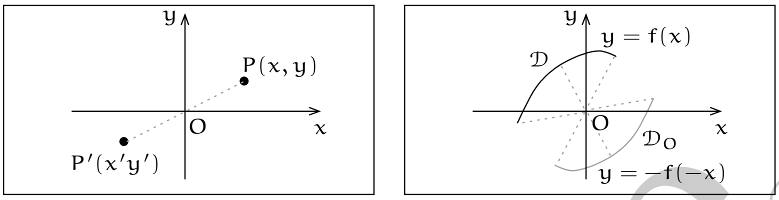
$$\sigma_{y=x} \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \tag{3.6}$$

2 La dimostrazione rigorosa di questo fatto è semplice, basta applicare le proprietà dei triangoli.



(a) (b)

Figura 3.9: Simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.



(a) (b)

Figura 3.10: Simmetria rispetto all'origine.

In base a quanto detto se abbiamo una funzione $y = f(x)$ di diagramma $\mathcal{D}$ e a questo diagramma ne facciamo il simmetrico rispetto alla bisettrice $y = x$ (figura 3.9b), diciamolo $\mathcal{D}'$, l'equazione che ha come diagramma $\mathcal{D}'$ sarà

$$x = f(y)$$

infatti in base alla (3.6) ad y va sostituito x stesso e ad x va sostituito y.

Osservazione 3.2. Notiamo che l'equazione $x = f(y)$ non rappresenta necessariamente una funzione; infatti in tale relazione, fissato x, non è detto che gli corrisponda un unico y (come vedremo nell'esempio seguente). Se invece f è invertibile allora l'equazione $x = f(y)$ potrà essere messa nella forma esplicita in y cioè del tipo $y = g(x)$ che rappresenta l'equazione della funzione inversa di f.

Esempio 3.9. Data la funzione di equazione $y = x^2$ scrivere l'equazione della sua simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$.

Soluzione. Essa è $x = y^2$, e questa non è l'equazione di una funzione infatti ad ogni valore di $x \geqslant 0$ corrispondono due distinti valori di y che sono $y = \pm\sqrt{x}$.

La *simmetria* rispetto alla bisettrice del secondo quarto quadrante è una *simmetria centrale* di centro l'origine, quindi: sia $P(x, y)$ un punto del piano cartesiano; se ad esso applichiamo una simmetria σ_O centrale di centro l'origine degli assi $O(0, 0)$, otteniamo un punto $P'(x', y')$ che ha ascissa e ordinata opposta come si vede dalla figura 3.10a; pertanto le equazioni si questa trasformazione sono

$$\sigma_O \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \tag{3.7}$$

In base a quanto detto se abbiamo una funzione $y = f(x)$ di diagramma $\mathcal{D}$ e a questo diagramma ne facciamo il simmetrico rispetto all'origine O

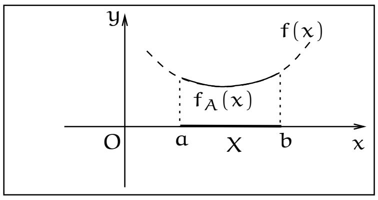


Figura 3.11: Restrizione.

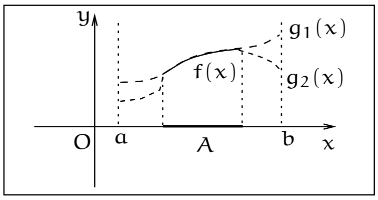


Figura 3.12: Prolungamenti.

(figura 3.10b), diciamaolo $\mathcal{D}_O$, l'equazione che ha come diagramma $\mathcal{D}_O$ sarà

$$y = -f(-x)$$

infatti in base alla (3.7) ad y va sostituito $-y$ stesso e ad x va sostituito $-x$, ottenendo $-y = f(-x)$ cioè $y = -f(-x)$.

Esempio 3.10. Data la funzione $y = 3x - 2$ scrivere l'equazione della sua simmetrica rispetto all'origine.

Soluzione. Essa è banalmente

$$-y = -3x - 2 \iff y = 3x + 2$$

3.6 RESTRIZIONE E PROLUNGAMENTO

Nel paragrafo 2.6 a pagina 28 si è data la definizione di restrizione e prolungamento di una funzione. Tali definizioni a maggior ragione valgono nel caso di funzioni reali a variabile reale. Per queste ultime possiamo parlare di diagramma cartesiano e quindi visualizzare tali definizioni.

Sia f una funzione definita su un sottoinsieme di numeri reali e a valori reali, si può quindi parlare di diagramma; se $X \subset A$ il diagramma della restrizione di f ad X è costituito di punti del diagramma di f che si proiettano ortogonalmente nei punti di X (vedi figura3.11 dove $X = [a, b]$).

Evidente è altresì che se $Y \supset A$, di una funzione definita in A esistono infiniti prolungamenti su Y.

In figura 3.12 con riferimento a funzioni reali di variabile reale, è rappresentato il diagramma di una funzione f e quelli di due suoi prolungamenti g_1 e g_2, da A su un intervallo $[a, b] \supset A$.

3.7 FUNZIONI INVERTIBILI

Nel paragrafo 2.9 a pagina 37 si è data la definizione di funzione invertibile, ora vedremo il legame tra il diagramma di una funzione invertibile e quello della sua inversa.

Con riferimento alle funzioni reali di variabile reale, tracciato il diagramma cartesiano di una funzione invertibile f, diciamolo Γ (figura 3.13) e il diagramma della funzione inversa f^{-1} con riferimento agli stessi assi e quindi di rappresentare sempre il dominio sull'asse "orizzontale" e il codominio sull'asse "verticale", è evidente che il grafico Γ^{-1} della funzione inversa f^{-1}

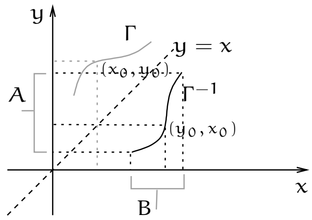


Figura 3.13: Diagramma di una funzione e della sua inversa.

(figura 3.13) si otterrà da quello di f scambiando l'ascissa con l'ordinata di ogni punto di Γ, cioè:

$$(x_0, y_0) \in \Gamma \Leftrightarrow (y_0, x_0) \in \Gamma^{-1}$$

Dal punto di vista geometrico la sostituzione:

$$\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases}$$

corrisponde ad una simmetria del piano rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante ($y = x$): tale bisettrice rimane "unita" ed ogni suo punto, avendo l'ascissa uguale all'ordinata, rimane fisso.

3.8 ESEMPI DI PARTICOLARI FUNZIONI

In questo paragrafo vedremo esempi di funzioni reali di variabile reale particolarmente importanti e ne tracceremo anche il diagramma (ove possibile).

3.8.1 La funzione costante

Assegnato un numero reale c, la funzione f definita da:

$$f(x) = c \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

si chiama *funzione costante* in $\mathbb{R}$ (o semplicemente una *costante*). Il suo codominio è costituito dal solo punto c, cioè $f(\mathbb{R}) = \{c\}$; il suo diagramma è la retta parallela all'asse delle x passante per il punto $(0, c)$ (figura 3.14a). Pertanto tale retta orizzontale ha equazione $y = c$.

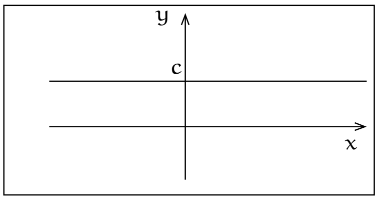
Analogamente, se in luogo di $\mathbb{R}$ si denota un suo sottoinsieme X, la funzione definita da

$$f(x) = c \qquad \forall x \in X$$

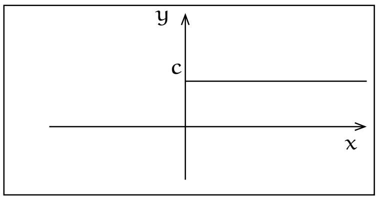
si chiama funzione costante in X. Il suo diagramma è costituito da tutti i punti della retta di equazione $y = c$ che si proiettano ortogonalmente nei punti di X. Per esempio la funzione

$$f\colon x \in [0, +\infty[\to c,$$

ha diagramma in figura 3.14b.



(a)



(b)

Figura 3.14: Funzione costante.

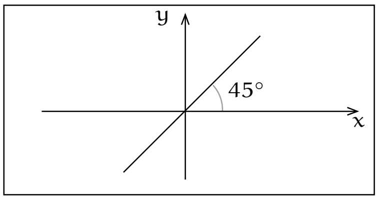


Figura 3.15: Funzione identica.

3.8.2 Funzione identica

La funzione identica è stata definita nel paragrafo 2.9 a pagina 37, è la funzione in cui l'immagine di ogni elemento coincide con l'elemento stesso, nel caso di dominio e codominio reale diventa

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

ed ovviamente, ha come diagramma la retta di equazione $y = x$ che sarebbe la bisettrice del primo e terzo quadrante (figura 3.15).

Analogamente se in luogo di $\mathbb{R}$ si considera un suo sottoinsieme X, la funzione definita in X da

$$f(x) = x \quad \forall x \in X,$$

si chiama funzione identica in X. Il suo diagramma è costituito dai punti della retta di equazione $y = x$ che si proiettano ortogonalmente nei punti di X.

3.8.3 Funzioni di proporzionalità

Nel volume 1 abbiamo visto che due grandezze y e x si dicono direttamente proporzionali quando il loro rapporto è una costante k non nulla

$$\frac{y}{x} = k \qquad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Di conseguenza, ricavando y, la *funzione di diretta proporzionalità* è la funzione che a un generico valore $x \in \mathbb{R}$ associa un valore $y \in \mathbb{R}$ pari al prodotto di x per una costante k diversa da zero:

$$f\colon x \in \mathbb{R} \to y = kx \in R \quad \text{con } k \neq 0.$$

Il diagramma di una funzione di diretta proporzionalità è una retta che passa per l'origine di pendenza pari a k.[3]. In figura 3.16 c'è l'esempio di una funzione di diretta proporzionalità nel caso $k = 2$.

3 Quando nei volumi successivi si definirà la derivata sarà formalizzata anche la definizione di pendenza di una retta, per ora pensiamo alla pendenza come l'inclinazione rispetto all'asse positivo delle x

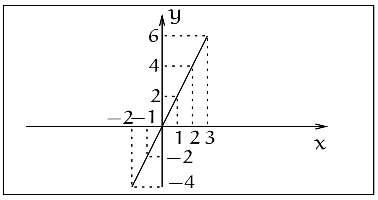


Figura 3.16: Diagramma della funzione di diretta proprorzionalità $y = 2x$.

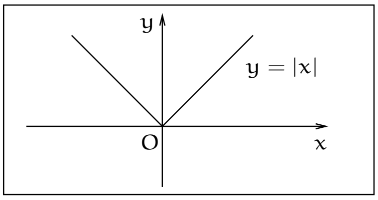


Figura 3.17: La funzione valore assoluto.

3.8.4 La funzione valore assoluto

La funzione f che ad ogni numero reale restituisce il suo valore assoluto

$$f(x) = |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

si chiama *funzione valore assoluto*. Il suo codominio è ovviamente $[0; +\infty[$; ricordando la definizione di valore assoluto, si riconosce che il suo diagramma è costituito dalle due semirette bisettrici del primo e del secondo quadrante (figura 3.17).

3.8.5 La funzione gradino

Nelle applicazioni (soprattutto ingegneristiche) si incontra sovente la cosiddetta *funzione a scalino (unitario)* o *funzione a gradino (unitario)* che si indica con $1(x)$ o con $u(x)$, ed è definita in tutto l'intervallo $]-\infty; +\infty[$ dalla posizione:

$$1(x) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{per } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Tale funzione ha per codominio l'insieme $\{0, 1\}$, ed il suo diagramma è formato da due semirette orizzontali, una delle quali (quella di sinistra) privata dell'origine (figura 3.18).

Nella pratica può essere utile anche considerare funzioni gradino che non sono unitari cioè il cui valore per $x \geqslant 0$ non è 1 ma un altro valore reale qual-

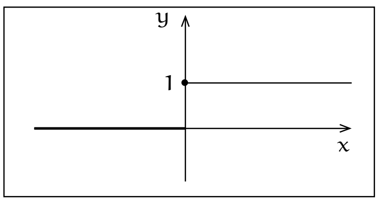


Figura 3.18: Funzione a gradino.

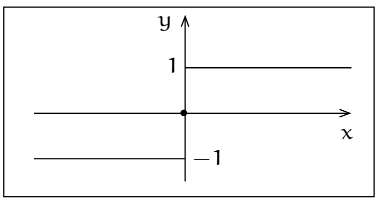


Figura 3.19: Funzione signum.

siasi k in tal caso si parla di *funzione gradino di ampiezza* k e la cui espressione è ovviamente:

$$k1(x).$$

3.8.6 La funzione signum o segno

Si chiama *signum* o funzione *segno*, e si indica con $\operatorname{sgn} x$, la funzione (figura 3.19) definita da:

$$\operatorname{sgn} x \triangleq \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

essa ha per insieme di esistenza l'intervallo $]-\infty; +\infty[$, e per codominio l'insieme $\{-1, 0, 1\}$; evidentemente si ha:

$$\operatorname{sgn} x = 1(x) - 1(-x)$$

infatti

$$1(-x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

quindi $1(x) - 1(-x)$ vale -1 per $x < 0$, 0 per $x = 0$ e 1 per $x > 0$, proprio come la funzione segno.

3.8.7 La funzione parte intera

Assegnato un numero reale a, mediante la sua rappresentazione decimale:

$$a = \pm m.c_1c_2c_3\ldots$$

la parte intera di a, cioè il numero intero $\pm m$ si suole indicare con il simbolo $[a]$. La funzione definita in $\mathbb{R}$ che ad ogni numero x associa la sua parte intera cioè:

$$x \to [x]$$

si chiama *funzione parte intera* di x (o semplicemente *parte intera*).

Se n è un numero intero positivo, nell'intervallo $[n-1, n[$ la funzione è costante e si ha $[x] = n - 1$; analogamente nell'intervallo $]-n, -n+1]$ si ha $[x] = -n + 1$. La funzione ha dunque per codominio $\mathbb{Z}$ ed il suo diagramma si compone di infiniti segmenti orizzontali, di cui uno è l'intervallo aperto $]-1, 1[$, ed i rimanenti sono privi di uno degli estremi (figura 3.20).

3.8.8 La funzione di Dirichelet

Come abbiamo già osservato non sempre è possibile disegnare il diagramma di una funzione. Si consideri ad esempio la funzione f definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

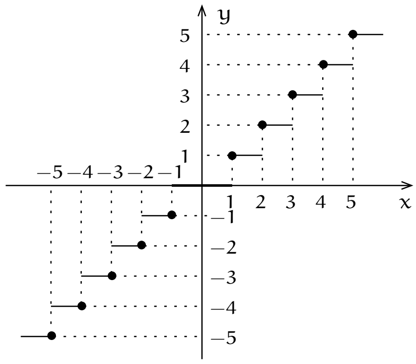


Figura 3.20: La funzione parte intera.

ch prende il nome di *funzione di Dirichelet*. Essa ha per insieme di esistenza $\mathbb{R}$, e per codominio $\{0, 1\}$. Il suo diagramma si compone di (infiniti) punti dell'asse x che hanno ascisse razionali e dei punti della retta di equazione $y = 1$ (che sono infiniti anche'essi) che hanno ascissa irrazionale. Non è possibile tracciare completamente tale diagramma, pur potendosene tracciare quanti punti si vogliono.

3.8.9 La funzione caratteristica di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Se X è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in X \\ 0 & \forall x \in \mathbb{R} - X \end{cases}$$

si chiama *funzione caratteristica* di X. La funzione di Dirichelet è dunque la funzione caratteristica dell'insieme $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dei numeri irrazionali.

3.9 FUNZIONI POSITIVE, NEGATIVE. ZERI E VALORE ASSOLUTO DI UNA FUNZIONE.

Definizione 3.1 (Funzione positiva)**.** Una funzione f, definita in $X \subseteq \mathbb{R}$, si dice *positiva* in un sottoinsieme A di X ($A \subseteq X$), se assume valori maggiori di zero per ogni x di A; in simboli:

$$f \text{ positiva in } A \overset{\triangle}{\iff} f(x) > 0 \quad \forall x \in A$$

Definizione 3.2 (Funzione negativa)**.** Una funzione f, definita in $X \subseteq \mathbb{R}$, si dice *negativa* in un sottoinsieme A di X ($A \subseteq X$), se assume valori minori di zero per ogni x di A; in simboli:

$$f \text{ negativa in } A \overset{\triangle}{\iff} f(x) < 0 \quad \forall x \in A$$

Definizione 3.3 (Funzione a segno costante)**.** Una funzione f definita in $X \subseteq \mathbb{R}$ e che sia positiva o negativa in un sottoinsieme A di X ($A \subseteq X$), si dice che è una *funzione a segno costante* in A.

Definizione 3.4 (Funzione non negativa)**.** Una funzione f, definita in $X \subseteq \mathbb{R}$, si dice *non negativa* in un sottoinsieme A di X ($A \subseteq X$), se assume valori maggiori o uguali a zero per ogni x di A; in simboli:

$$f \text{ non negativa in } A \overset{\triangle}{\iff} f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in A$$

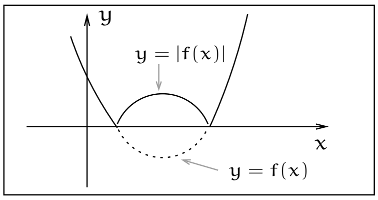


Figura 3.21: Esempio del valore assoluto di una funzione

Definizione 3.5 (Funzione non positiva)**.** Una funzione f, definita in $X \subseteq \mathbb{R}$, si dice *non positiva* in un sottoinsieme A di X ($A \subseteq X$), se assume valori minori o uguali a zero per ogni x di A; in simboli:

$$f \text{ non positiva in } A \overset{\triangle}{\iff} f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in A$$

Definizione 3.6 (Zero di una funzione)**.** Data una funzione f definita in un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$, se per un punto $x_0 \in X$ si ha $f(x_0) = 0$, si dice che la *funzione si annulla* in x_0 ovvero che f ha uno *zero* in x_0, ovvero ancora che x_0 è uno *zero* di f: il punto P_0 del diagramma di ascissa x_0 appartiene allora all'asse delle x.

Definizione 3.7 (Funzione identicamente nulla)**.** Data una funzione f definita in un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia A un sottoinsieme di X ($A \subseteq X$), si dice che f è *identicamente nulla* in A se si annulla in tutti i punti di A. In simboli:

$$f \text{ identicamente nulla in } A \overset{\triangle}{\iff} f(x) = 0 \quad \forall x \in A$$

Definizione 3.8 (Valore assoluto di una funzione)**.** Data una funzione definita in X, si chiama *valore assoluto della funzione* f, si indica con $|f|$, la funzione che ad ogni $x \in X$ associa il valore assoluto di $f(x)$. In simboli:

$$|f|\colon x \in X \to |f(x)|$$

Tale funzione è non negativa in X, ed il suo diagramma si ottiene da quello di f sostituendo ai punti di ordinata negativa i loro simmetrici rispetto all'asse delle x come mostra l'esempio in figura 3.21.

3.10 FUNZIONI PARI, DISPARI, PERIODICHE

Definizione 3.9 (Funzione pari)**.** Una funzione reale f, definita nell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$, si dice *pari* se (figura 3.22):

- l'opposto d ogni elemento di X appartiene ad X;
- per ogni $x \in X$ si ha:

$$f(-x) = f(x).$$

Definizione 3.10 (Funzione dispari)**.** Una funzione reale f, definita nell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$, si dice *dispari* se (figura 3.23):

- l'opposto d ogni elemento di X appartiene ad X;
- per ogni $x \in X$ si ha:

$$f(-x) = -f(x) \iff f(x) = -f(-x).$$

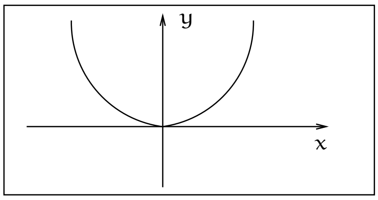


Figura 3.22: Funzione pari.

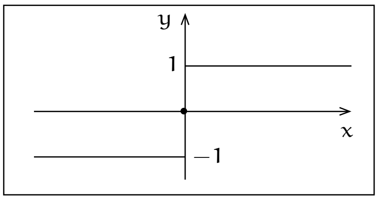


Figura 3.23: Funzione dispari.

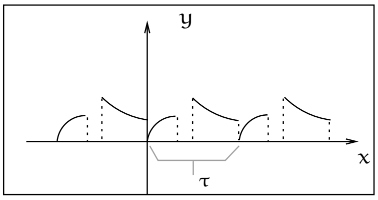


Figura 3.24: Funzione periodica.

Ovviamente una funzione dispari si annulla nel punto origine O se questo appartiene all'insieme di definizione.

Osservazione 3.3. Il diagramma di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (asse di simmetria), il diagramma di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine (centro di simmetria).

Definizione 3.11 (Funzione periodica)**.** Una funzione reale f definita in un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$, si dice *periodica di periodo* τ (figura 3.24), dove τ è un numero reale positivo, se sono verificate le seguenti condizioni:

- se x è un punto di X, all'insieme X appartengono anche tutti i punti del tipo $x + k\tau$, con $k \in \mathbb{Z}$;
- per ogni $x \in X$ si ha:

  $$f(x) = f(x + \tau), \tag{3.8}$$

  e quindi anche:

  $$f(x) = f(x + k\tau) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Il codominio della funzione f, periodica di periodo τ, coincide con il codominio della sua restrizione all'insieme $X \cap [0, \tau[$, ed il diagramma di f si compone di infinite parti, ciascuna delle quali si ottiene dalla predetta restrizione con una traslazione parallela all'asse x e di ampiezza multipla di τ (figura 3.24).

Notiamo che una funzione periodica di periodo τ è periodica anche di un periodo multiplo intero (positivo) di τ (per esempio 2τ, 3τ e così via). Di solito per *periodo* si intende il minimo valore reale (positivo) per cui vale la (3.8), nel caso in cui si voglia rimarcare il fatto che si considera il minimo periodo questo prende il nome di *periodo fondamentale*.